Lebensdauerberechnung für schwingend beanspruchte Bauteile auf spektralanalytischer Grundlage

Von Dr.-Ing. *Dieter Joensson*, Technische Universität Dresden,
Sektion Grundlagen des Maschinenwesens

Für eine hohe Materialökonomie ist die Ausschöpfung der Werkstoffeigenschaften unerläßlich. Eine die Werkstoffestigkeit weitgehend ausnutzende Dimensionierung schwingend beanspruchter Bauteile erfordert als wesentliche Voraussetzung die möglichst genaue Erfassung des Beanspruchungsverlaufs.
Im vorliegenden Beitrag wird ein Lebensdauerberechnungsverfahren vorgestellt, das anstelle herkömmlicher Klassierverfahren die digitale Spektralanalyse benutzt, wobei als Eingangsgrößen die in konstanten Zeitschritten gespeicherten Momentanwerte der Beanspruchungs-Zeit-Funktion fungieren. Grundlage der Berechnung ist die Umformung dieser Funktion in eine Schädigungsgradienten-Zeit-Funktion. Dadurch gestattet das Verfahren die Nutzung des originalen Beanspruchungsverlaufs, ohne Informationen über Amplitudenverteilungen zu benötigen.
Als Vorteile des Verfahrens sind erkennbar: weniger aufwendige Ermittlung des Beanspruchungs-Zeit-Verlaufs, unabhängig von der Amplitudenverteilung, befriedigende Übereinstimmung zwischen errechneter und experimentell ermittelter Lebensdauer, Grundlage für zutreffendere Zuverlässigkeitsaussagen und materialökonomischere Bauteilbemessung.

1. Einleitung

Gegenwärtig setzen die meisten Verfahren zur Lebensdauerberechnung die Ermittlung von Amplitudenverteilungen voraus. Dabei wird die Häufigkeit bestimmter Beanspruchungswerte einer repräsentativen Beanspruchungs-Zeit-Funktion klassiert und aus den Klassierergebnissen ein Kollektiv von Beanspruchungszyklen abgeleitet. Je nach Wahl des Klassierverfahrens und der Weiterbearbeitung der so gewonnenen Werte kann eine andere Idealisierung der Beanspruchung entstehen, die maßgeblich die rechnerische Lebensdauer beeinflußt.
Im Unterschied dazu wird nachfolgend ein anderer Weg beschrieben. Es wird gezeigt, daß durch die Verwendung eines quadratischen Mittelwertes linearer Schädigungen ein direkter Zusammenhang zwischen Lebensdauer und Gesamtleistung von Momentanwerten einer aus der Wöhlerlinie und der Beanspruchung abgeleiteten Schädigungsgradienten-Zeit-Funktion entsteht. Die Gesamtleistung ist durch *Fourier*-Transformation dieser Funktion berechenbar. Dadurch werden Angaben zur Amplitudenverteilung nicht benötigt. An die Stelle der Klassierung und deren Aufbereitung tritt jetzt die digitale Spektralanalyse, deren erreichter Entwicklungsstand die Verarbeitung beliebiger Beanspruchungs-Zeit-Funktionen endlicher Beanspruchungsleistung mit ausreichender Genauigkeit ermöglicht.

2. Zusammenhang zwischen linearer Schädigung und arithmetischem Mittelwert

Die Formel der linearen Schadensakkumulation nach *Palmgren/Miner* [1] [2] lautet

$$N_M = \frac{n_{\text{ges}}}{\sum\limits_{K=1}^{m} \frac{n_K}{N_K}} \tag{1}$$

Darin bedeutet:

N_M Lebensdauer nach *Palmgren/Miner*, in Schwingspielen (hier ohne Dauerfestigkeitsgrenze)
n_K Anzahl der Schwingspiele je Spannungsstufe σ_K
N_K ertragbare Schwingspiele der Stufe σ_K aus dem Wöhlerversuch
n_{ges} Summe aller Schwingspiele einer Teilfolge mit m Stufen;

$$n_{\text{ges}} = \sum_{K=1}^{m} n_K .$$

Für das arithmetische Mittel $\bar{x}$ einer diskreten Größe x_K gilt allgemein

$$\bar{x} = \frac{1}{H_{\text{ges}}} \cdot \sum_{K=1}^{m} H_K \cdot x_K \tag{2}$$

mit

H_K absolute Häufigkeit der Größe x_K,
H_{ges} gesamte absolute Häufigkeit.

Analog dazu kann die Gleichung (1) mit $H_K = n_K$ und $H_{\text{ges}} = n_{\text{ges}}$ umgeformt werden zu

$$\frac{1}{N_{\text{M}}} = \frac{1}{n_{\text{ges}}} \cdot \sum_{K=1}^{m} n_K \cdot \frac{1}{N_K} \tag{3}$$

für $1/N_K$ als zu mittelnde diskrete Größe. Diese Größe sei als „linearer Schädigungsgradient" ΔD_K der Stufe K bezeichnet:

$$\Delta D_K = \frac{1}{N_K}. \tag{4}$$

Die Lebensdauer nach *Palmgren/Miner* ist also der Kehrwert des arithmetischen Mittelwertes der linearen Schädigungsgradienten ΔD_K aller Stufen K:

$$N_{\text{M}} = \frac{1}{\overline{\Delta D}}. \tag{5}$$

3. Einbeziehung von Momentanwerten

Für Momentanwerte ergibt sich als integrale Größe die Gesamtleistung bzw. der Effektivwert. Dieser Wert ist für eine zentrierte Sinusfunktion $\sigma(t)$ mit der Amplitude $\sigma_{\text{o}K}$ (Oberspannung) wie folgt verknüpft:

$$\sigma_{\text{o}K} = \sqrt{2} \cdot \sigma_{\text{eff}}. \tag{6}$$

Bei einer zentrierten Sinusfunktion, deren Amplitude blockweise verschiedene konstante Werte annimmt (Blockprogramm der Betriebsfestigkeit), gilt

$$\overline{\overline{\sigma_{\text{o}}^2}} = \sqrt{\frac{1}{H_{\text{ges}}} \cdot \sum_{K=1}^{m} H_K \cdot \sigma_{\text{o}K}^2} = \sqrt{2} \cdot \sigma_{\text{eff}} \tag{7}$$

mit

H_{ges} gesamte absolute Häufigkeit der Sinusperioden
H_K absolute Häufigkeit der Sinusperioden der Amplitude $\sigma_{\text{o}K}$
$\sigma_{\text{o}K}$ Amplitude der Stufe K (Oberspannung)
m Anzahl der beteiligten Sinusblöcke
$\overline{\overline{\sigma_{\text{o}}^2}}$ quadratischer Mittelwert aller Amplituden $\sigma_{\text{o}K}$.

Der Effektivwert der Momentanwerte steht also in direktem Zusammenhang zum quadratischen Mittelwert $\overline{\overline{\sigma_{\text{o}}^2}}$ der Oberspannungen. Eine proportionale Beziehung zum arithmetischen Mittelwert $\overline{\sigma_{\text{o}}}$ besteht nicht, jedoch ist das arithmetische Mittel stets eine untere Schranke für den quadratischen Mittelwert:

$$\overline{\sigma_{\text{o}}} \leqq \overline{\overline{\sigma_{\text{o}}^2}} \tag{8}$$

Davon ausgehend, ist eine theoretische Lebensdauer N_{L} analog N_{M} der Gleichung (5) vorstellbar, die auf dem quadratischen Mittelwert basiert:

$$N_{\text{L}} = \frac{1}{\overline{\overline{\Delta D^2}}} \leqq N_{\text{M}} = \frac{1}{\overline{\Delta D}} \tag{9}$$

Für N_{L} stellt die Lebensdauer N_{M} eine obere Schranke dar. Der quadratische Mittelwert der Schädigungsgradienten ΔD_K ist nun analog Gleichung (7) durch einen Faktor u mit dem Effektivwert aller Momentanwerte einer Funktion $\Delta D(t)$ verbunden:

$$\overline{\overline{\Delta D^2}} = u \cdot \Delta D_{\text{eff}}. \tag{10}$$

Einsetzen in die Gleichung (9) liefert

$$N_{\text{L}} = \frac{1}{u \cdot \Delta D_{\text{eff}}} \tag{11}$$

Damit ist der Zusammenhang zwischen Momentanwerten und einer Lebensdauer hergestellt, ohne daß Verteilungsfunktionen der Maxima und Minima der Beanspruchungs-Zeit-Funktion benötigt werden.
Bei den in der Gleichung (11) zugrunde gelegten Momentanwerten handelt es sich aber nicht um Werte der Funktion $\sigma(t)$, sondern um „momentane Schädigungsgradienten", die das Schädigungsvermögen in jedem Momentanwert $\sigma(t)$ repräsentieren. Der zugehörige momentane Schädigungsgradient $\Delta D(t)$ folgt aus der Wöhlerliniengleichung; z. B. gilt für die Geradengleichung im log σ-log N-System

$$N(\sigma) = K_{\text{W}} \cdot \sigma^{-\varphi} \tag{12}$$

und

$$\Delta D(t) = \frac{1}{K_{\text{W}}} \cdot [\sigma(t)]^{\varphi} \tag{13}$$

mit

K_{W} Wöhlerlinienkonstante,
φ Neigung der Wöhlerlinie.

$\Delta D(t)$ ist die Schädigungsgradienten-Zeit-Funktion (im folgenden als Schädigungsgradientenfunktion bezeichnet). Sie ist jetzt nicht mehr eine Sinus-Zeit-Funktion $\sigma(t)$, sondern eine mit φ potenzierte Sinusfunktion.
Daher wird der in der Gleichung (10) eingeführte Faktor u in Abhängigkeit von φ größer als $\sqrt{2}$:

$$u^2(\varphi) = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \ldots = \frac{\varphi!}{\prod_{l=1}^{\varphi} \left(l - \frac{1}{2}\right)} \geqq 2, \tag{14}$$

hier formuliert für ganzzahlige $\varphi \geqq 1$.

4. Spektralanalyse der Schädigungsgradientenfunktion

Treten in der Beanspruchungs-Zeit-Funktion keine irregulären Extremwerte auf, so kann die Gleichung (9) unter Berücksichtigung der Gleichungen (7) und (1) wie folgt geschrieben werden:

$$N_{\text{L}} = \sqrt{\frac{n_{\text{ges}}}{\sum_{K=1}^{m} \frac{n_K}{N_K^2}}} \leqq N_{\text{M}} \tag{15}$$

Für den allgemeinen Fall einer beliebigen Beanspruchungs-Zeit-Funktion bietet sich durch die Gleichung (11) die Möglichkeit an, den Effektivwert bzw. die Gesamtleistung spektral aus Leistungsanteilen zu berechnen.
ΔD_{eff} ist die Wurzel aus der Gesamtleistung $S_{\Delta D\,\text{ges}}$ der Funktion $\Delta D(t)$:

$$\Delta D_{\text{eff}} = \sqrt{S_{\Delta D\,\text{ges}}}, \tag{16}$$

mit

$$S_{\Delta D\,\text{ges}} = \int_0^{\infty} \tilde{G}_{\Delta D}(f) \cdot \mathrm{d}f, \tag{17}$$

wobei $\tilde{G}_{\Delta D}(f)$ die den Frequenzen zugeordnete einseitige Spektralleistungsdichte (auf den Frequenzabstand df bezogene Spektralleistung) der Schädigungsgradientenfunktion darstellt.
Bei einem extrem schmalbandigen Vorgang wird die Gesamtleistung durch die einseitige Spektralleistung $G_{\Delta D}(f_0)$ der Frequenz f_0 repräsentiert:

$$S_{\Delta D\,\text{ges}} = G_{\Delta D}(f_0). \tag{18}$$

Einsetzen in die Gleichungen (16) und (11) liefert

$$N_{\text{L}} = \frac{1}{u \cdot \sqrt{G_{\Delta D}(f_0)}} \tag{19}$$

Mit $N_L = T_L \cdot f_0$ folgt daraus die Lebensdauer T_L:

$$T_L = \frac{1}{u \cdot \sqrt{G_{\Delta D}(f_0) \cdot f_0^2}}. \tag{20}$$

Unter der Wurzel steht die Spektralleistung der Schädigungsgradienten-Geschwindigkeits-Funktion $\Delta D_v(t) = \mathrm{d}[\Delta D(t)]/\mathrm{d}t$, dividiert durch $4\pi^2$:

$$G_{\Delta D}(f_0) \cdot f_0^2 = G_{\Delta D_v}(f_0)/4\pi^2 = S_{\Delta D_v\,\mathrm{ges}}/4\pi^2 \tag{21}$$

Damit wird aus der Gleichung (20)

$$T_L = \frac{2\pi}{u \cdot \sqrt{S_{\Delta D_v\,\mathrm{ges}}}} = \frac{2\pi}{u \cdot \sqrt{\int\limits_0^\infty \widetilde{G}_{\Delta D_v}(f) \cdot \mathrm{d}f}} \tag{22}$$

Für alle $G_{\Delta D_v}(f)$ gilt wieder

$$\widetilde{G}_{\Delta D_v}(f) = 4\pi^2 \cdot \widetilde{G}_{\Delta D}(f) \cdot f^2 \tag{23}$$

Durch Einsetzen der Gleichung (23) in die Gleichung (22) entsteht die Lebensdauer für beliebige Beanspruchungs-Zeit-Funktionen:

$$T_L = \frac{1}{u \cdot \sqrt{\int\limits_0^\infty \widetilde{G}_{\Delta D}(f) \cdot f^2 \cdot \mathrm{d}f}} \tag{24}$$

Die reellen Leistungsdichteanteile $\widetilde{G}_{\Delta D}(f)$ werden aus den Beträgen der komplexen Amplitudendichte $\widetilde{A}_{\Delta D}(j \cdot f)$ der Schädigungsgradientenfunktion gebildet:

$$\widetilde{G}_{\Delta D}(f) = \frac{2\,|\widetilde{A}_{\Delta D}(j \cdot f) \cdot \mathrm{d}f|^2}{\mathrm{d}f} \tag{25}$$

Die Funktion $\widetilde{A}_{\Delta D}(j \cdot f)$ folgt aus einer *Fourier*transformation der Funktion $\Delta D(t)$ vom Zeit- in den Frequenzbereich:

$$\widetilde{A}_{\Delta D}(j \cdot f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Delta D(t) \cdot \mathrm{e}^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} \cdot \mathrm{d}t \tag{26}$$

Es gilt $j = \sqrt{-1}$.

5. Digitale Spektralanalyse

Eine analytisch geschlossene Lösung der Gleichung (26) bereitet selbst für einfache Funktionen $\Delta D(t)$ Schwierigkeiten. Anders verhält es sich aber bei digitalisierter Beanspruchungs-Zeit-Funktion, die nach dem Abtasten mit dem Abtastintervall Δt als diskrete Wertefolge $\sigma_i(t_i)$ vorliegt.
Für n diskrete Punkte $\sigma_i(t_i)$ entstehen

$$p = \frac{n}{2} + 1 \tag{27}$$

diskrete Spektralleistungen $G_{\Delta D_l}$ auf den Frequenzen f_l, deren konstanter Abstand $\Delta f = 1/[(n-1) \cdot \Delta t]$ beträgt. Durch die Digitalisierung gehen die Integrale in den Gleichungen (24) und (26) in Summen über:

$$T_L = \frac{1}{u \cdot \sqrt{\sum\limits_{l=1}^{p} G_{\Delta D_l}(f_l) \cdot f_l^2}} \tag{28}$$

$$G_{\Delta D_l}(f_l) = 2\,|A_{\Delta D_l}|^2 \tag{29}$$

$$A_{\Delta D_l}(j \cdot f_l) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta D_i(t_i) \cdot \mathrm{e}^{-j \cdot 2\pi \cdot l \cdot i/n} \tag{30}$$

mit

$$l = 1, 2, 3, \ldots, p$$

und

$$\Delta D_i(t_i) = \frac{1}{K_W} \cdot [\sigma_i(t_i)]^\varphi$$

Zur Ermittlung von Lebensdauerwerten nach Gleichung (28) wurde das FORTRAN-Programm SLEBE 1 [3] für den Rechner SPC 16-65 (Hersteller: General Automation) geschrieben, das zur rationellen Lösung der Gleichung (30) Unterprogramme der schnellen *Fourier*transformation [4] nutzt. Als Eingabewerte dienen die auf Magnetplatte abgelegten digitalisierten Werte $\sigma_i(t_i)$ sowie die Wöhlerlinienkonstanten K_W und φ. Das Programm enthält die Möglichkeit zur Modellierung der Schädigung im Druckbereich.

6. Anwendungsbeispiele

Ergebnisse des Programms SLEBE 1 wurden mit experimentell ermittelten Lebensdauerwerten verglichen. Es handelt sich dabei um Zeitfestigkeitsversuche an gekerbten Rundproben aus St 38-b2. Gleiche Proben wurden von *Lange* [5] [6] für andere Untersuchungen genutzt. Die Prüfung unter axialer Zug-Druck-Beanspruchung erfolgte auf einer prozeßrechnergesteuerten Hydropulsanlage der Sektion Grundlagen des Maschinenwesens der Technischen Universität Dresden. Es kamen drei verschiedene biharmonische Beanspruchungs-Zeit-Funktionen zum Einsatz, deren allgemeine Beschreibung lautet:

$$\sigma_{Pj}(t) = \sigma_{Aj} \cdot \sin a_j + \frac{1}{2}\,\sigma_{Aj} \cdot \sin b_j \tag{31}$$

mit

$$j = 1, 2, 3.$$

Die drei Funktionsverläufe zeigt das Bild 1. In der Tafel 1 sind die Kennwerte dieser Gleichung, Versuchsergebnisse und die mit dem Programm SLEBE 1 nach Gleichung (28) berechneten Lebensdauern enthalten. Dabei bedeutet:

- σ_A Amplitude der Grundschwingung
- a, b Argumente der Grund- und Oberschwingung
- N_2 empirischer Erwartungswert der vom Prozeßrechner gemessenen ertragbaren Halbschwingspiele, je Versuchsserie mit 7 bis 8 Proben

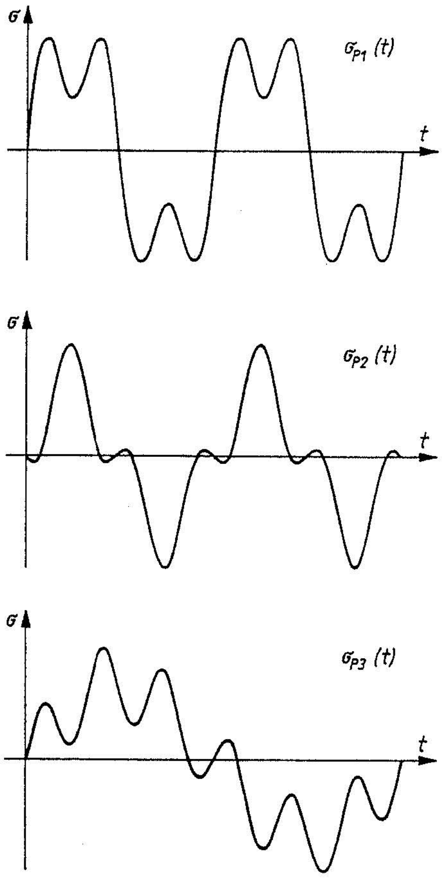

Bild 1: Darstellung der verwendeten drei biharmonischen Beanspruchungs-Zeit-Funktionen $\sigma_{Pj}(t)$

Tafel 1: Vergleich gemessener und berechneter Lebensdauern T_L

Einheitlich:

- Wöhlerlinie nach [5]: $N(\sigma) = 1{,}27 \cdot 10^{17} \cdot \sigma^{-5{,}42}$; Bruchwahrscheinlichkeit 50%
- Frequenz der Oberschwingung $f_2 = 3\omega/2\pi = 15$ Hz
- maximaler Spannungshorizont $\sigma_{max} = 170$ MPa (Nennspannung im Nettoquerschnitt)

	$\sigma_{P1}(t)$	$\sigma_{P2}(t)$	$\sigma_{P3}(t)$
σ_A	157,54 MPa	113,3 MPa	113,3 MPa
a	$\omega \cdot t$	$\omega \cdot t$	$\omega \cdot t/2$
b	$3\omega \cdot t$	$3\omega \cdot t + \pi$	$3\omega \cdot t$
N_2	545561	1049809	1124303
N_R	181854	547405	374768
N_{CD}	103460 (1,78)	310378 (1,76)	298935 (1,25)
$T_E \cdot s^{-1}$	18185	36494	37477
$T_L \cdot s^{-1}$	16075 (1,13)	30670 (1,19)	33767 (1,11)

N_R Anzahl der Schwingspiele, die durch einparametrische Klassierung regulärer Spitzenwerte entsteht, während der gemessenen Lebensdauer

N_{CD} Anzahl der Schwingspiele, berechnet nach *Corten/Dolan* (*Palmgren/Miner* ohne Dauerfestigkeit) Kollektivbildung auf der Basis einparametrischer Klassierung regulärer Spitzenwerte

T_E Umrechnung der Halbschwingspiele in Sekunden, weil die Halbschwingspiele mit 30 Hz erzeugt wurden, um eine einheitliche Frequenz der Oberschwingung von 15 Hz zu realisieren;

$$T_E = \frac{N_2}{30\ s^{-1}}$$

T_L Lebensdauer, berechnet nach Gleichung (28) mit $u = \sqrt{2}$.

In Klammern gesetzt wurden die Schadenssummen N_R/N_{CD} und T_E/T_L, jeweils in der Zeile N_{CD} und T_L.

Die Berechnung mit SLEBE1 erfolgte ohne Berücksichtigung einer Dauerfestigkeitsgrenze und unter der Annahme, daß keine Schädigung im Druckbereich vorliegt. Es wurden jeweils 5000 Momentan-Istwerte σ_i in Schädigungsgradienten umgerechnet. Zur Verringerung von Abbruchfehlern kann wahlweise die zu transformierende Funktion im Zeitbereich mit verschiedenen Gewichtsfunktionen multipliziert werden. Im Fall der berechneten Lebensdauer T_L (Tafel 1) handelt es sich um die *Hamming*-Gewichtsfunktion [7]. Außerdem wurden vor der Transformation Nullwerte der Zeitfunktion eliminiert, um zusätzliche Verfälschungen des Spektrums zu vermeiden. Für u in der Gleichung (28) wurde die untere Schranke, siehe Gleichung (14), eingesetzt.

7. Zusammenfassung

Die gezeigte Möglichkeit, ausgehend von Momentanwerten die Lebensdauer schwingend beanspruchter Bauteile zu berechnen, ist an die Voraussetzung, daß die Schädigung linear zunimmt, und an die Grenzen digitaler Spektralanalyse gebunden. Daher ist das Ergebnis wie auch bei anderen Verfahren stets mit einer Unschärfe behaftet. Durch die Verwendung der spektralen Analyse können jedoch digital gespeicherte Beanspruchungsverläufe direkt in Lebensdauer umgerechnet werden, ohne daß Amplitudenverteilungen ermittelt werden müssen. Dabei kann jede beliebige, auch regellose, Beanspruchungs-Zeit-Funktion verarbeitet werden.

Literatur

[1] *Palmgren, A.:* Die Lebensdauer von Kugellagern. VDI-Z. 69 (1924), S. 339–341.

[2] *Miner, M. A.:* Cumulative Damage in Fatigue. Journal of Applied Mechanics (1945), S. A159–A164.

[3] *Joensson, D.:* Programmpaket SIPRO zur Signal-Prozeßanalyse. Forschungsbericht, TU Dresden, Sektion Grundlagen des Maschinenwesens, 1984 (unveröffentlicht).

[4] FFTA 40 (Unterprogramme zur Fourieranalyse): Bedienungsanleitung PE 6.502. Carl Schenck AG, Darmstadt, 1979.

[5] *Lange, D.:* Lebensdauerbestimmung für regellos beanspruchte Bauteile auf der Grundlage stochastischer Kenngrößen. Diss. TU Dresden 1983.

[6] *Lange, D.:* Einfluß stochastischer Kenngrößen auf die Lebensdauer regellos beanspruchter Probestäbe. IfL-Mitt., Dresden 23 (1984) 1, S. 14–17.

[7] *Achilles, D.:* Die Fourier-Transformation in der Signalverarbeitung. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag 1978.

(MiA 1373)