

Neue Anwendung schneller Fouriertransformation in der  
Betriebsfestigkeit und finiter Elemente in der Sintertheorie

Dem Wissenschaftlichen Rat der  
Technischen Universität Dresden

zur

Erlangung des akademischen Grades  
Doktor der Ingenieur-Wissenschaften

Dr.sc.techn.

vorgelegte Dissertation

von

Dr.-Ing. Dieter Joensson  
geb. am 20. 9. 1951 in Schönhausen/Elbe

Tag der Einreichung: 13.12.1985  
Tag der Verteidigung: 11. 6.1986

Gutachter: Herr Prof.Dr.rer.nat.habil. G.Landgraf  
TU Dresden

Herr Prof.Dr.sc.nat. W.Pompe  
AdW der DDR, ZFW Dresden

Herr Prof.Dr.sc.nat. B.Michel  
AdW der DDR, Institut für Mechanik

Vertraulichkeitsgrad: offen

Prof.Dr.-Ing.habil.Dr.-Ing.E.h. W.Lotze  
Vorsitzender der Prüfungskommission

### Anmerkung zur Habilitation:

Der akademische Grad Doktor der Wissenschaften (Dr.sc.) entsprach in der DDR dem westdeutschen Dr.habil., wenn zusätzlich zur erfolgreichen öffentlichen Verteidigung der Dissertation B die Lehrbefähigung für Hochschulen (Facultas docendi) in einem gesonderten Verfahren nachgewiesen wurde.

Diese Lehrbefähigung habe ich 1988 an der TU Karl-Marx-Stadt erworben.

1991 wurde mir von der TU Dresden der akademische Titel Dr.-Ing. habil. verliehen.

D. Joensson

### Note on habilitation:

In the GDR, the academic degree Doctor of Science (Dr.sc.) corresponded to the West German Dr.habil. if, in addition to the successful public defense of dissertation B, the teaching qualification for universities (Facultas docendi) was proven in a separate procedure.

I acquired this teaching qualification in 1988 at the TU Karl-Marx-Stadt.

In 1991, I was awarded the academic title of Dr.-Ing. habil. by the TU Dresden.

## V o r w o r t

Die vorliegende Dissertation besteht aus zwei selbständigen Teilen:

- I) Spektralanalytische Lebensdauerberechnung regellos schwingend beanspruchter Bauteile mit FFT
- II) Berechnung räumlicher Spannungen in den Gleitebenen von Zweiteilchen-Sintermodellen mit FEM

Beide Themen wurden mit Hilfe moderner numerischer Verfahren bearbeitet. Der Anwendungsumfang derartiger Verfahren und die Ausdehnung auf bisher nicht erschlossene Gebiete hat im letzten Jahrzehnt parallel zur Computer-Entwicklung beträchtlich zugenommen, weil die numerische Behandlung quantitative Aussagen ermöglicht, die mit analytischen Verfahren nicht erreichbar sind.

Das gilt auch für die im Teil I verwendete schnelle Fouriertransformation (FFT) zur digitalen Signalanalyse und für die in Teil II benutzte Finite-Elemente-Methode (FEM) zur Berechnung von Feldproblemen.

Trotz gravierender Unterschiede der beiden Verfahren (FFT gehört zu Klasse der Integraltransformationen und FEM zu Lösungsverfahren der Variationsrechnung) ist ihnen gemeinsam, daß sie theoretische Vorläufer zu Beginn des Jahrhunderts durch Runge /1/ für FFT und durch Ritz /2/ für FEM haben, aber erst mit der Entwicklung der elektronischen Rechentechnik ihre eigentliche Bedeutung erlangten. Das heißt, sie wurden von anderen Autoren neu vorgeschlagen, so 1956 die FEM durch Turner, Clough, Martin und Topp /3/ und 1965 die FFT durch Cooley-Tukey /4/ und später als Modifikation zu /2/ bzw. /1/ interpretiert. Die FFT stellt ein Produkt der theoretischen Nachrichtentechnik dar und die FEM wurde im Rahmen der Festkörpermechanik entwickelt. Inzwischen haben sich beide Verfahren auf den verschiedensten Fachgebieten durchgesetzt. Die FFT wurde bereits auf Probleme der Betriebsfestigkeit und die FEM in der Sintertheorie angewendet, nicht aber bezüglich einer "Schädigungsgradienten-Zeit-Funktion"

und bezüglich einer Spannungstensorkomponente in den Gleitebenen von Pulverteilchen.

Die Neuartigkeit der Anwendung beider Verfahren ergab sich aus analytischen Vorarbeiten zu den genannten Themen. Neu ist sowohl die Einführung und Fouriertransformation einer Schädigungsgradienten-Zeit-Funktion und die unkonventionelle Verarbeitung der Ergebnisse in Form quadratischer Mittelung im Teil I als auch die Berechnung von Schubspannungen in rotations-symmetrisch idealisierten Gleitebenen und die darauf basierende Ermittlung aktivierbarer Volumina im Teil II. In beiden Fällen wird die numerische Behandlung zunächst durch analytische Herleitungen begründet.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof.Dr.-Ing. Hans Prochnow, der als Forschungsgruppenleiter stets die Arbeit an dieser Dissertation umfassend gefördert hat.

Für die Diskussionen und Anregungen zur Thematik der Sinterkinetik danke ich Herrn Prof.Dr.-Ing.habil. Werner Schatt und Herrn Prof.Dr.sc.techn. Eckhart Friedrich.

Weiterhin danke ich meinen Kollegen Dr.-Ing.Siegfried Engelbrecht Dr.-Ing. Hans-Jürgen Hardtke, Dr.-Ing. Le Huy Thao sowie Herrn Dr.sc.nat. Winfried Schirotzek von der Sektion Mathematik der TU für die Hinweise zu speziellen mathematischen Problemen.

Meine Kollegen der Forschungsgruppe Betriebsfestigkeit haben in vielfältiger Hinsicht zum Gelingen der Arbeit beigetragen. Besonders hervorzuheben ist dabei die sorgfältige Anfertigung des maschinengeschriebenen Manuskriptes durch meine Kolleginnen Frau Swientek und Frau Thiel.



# Inhaltsverzeichnis Teil I

	<u>Seite</u>
1. Einleitung	1
2. Lebensdauer infolge stochastischer Beanspruchungs- Zeit-Funktionen	3
2.1. Beschreibung der Zufallsvariablen	3
2.2. Der stationäre ergodische Gaußprozeß	6
2.3. Lebensdauerberechnung für stationäre ergodische Gaußprozesse	8
2.3.1. Schmalbandprozeß	8
2.3.2. Breitbandprozesse	11
3. Verteilungsfreie Lebensdauerberechnung	14
3.1. Voraussetzungen für Verteilungsfreiheit	14
3.2. Vorschlag einer neuen Formel zur Berechnung der Lebensdauer	16
3.3. Ermittlung des Effektivwertes $\Delta D_{\text{eff}}$	17
3.4. Zusammenhang zwischen $\overline{\Delta D_K^2}$ und $\Delta D_{\text{eff}}$	18
3.5. Lebensdauer für Schmalbandprozesse	21
3.6. Lebensdauer für Breitbandprozesse	22
4. Anwendung diskreter Fouriertransformation auf die Schädigungsgradientenfunktion	23
4.1. Numerische Form der Lebensdauer Gleichung	23
4.2. Voraussetzungen und Folgen der Digitalisierung	25
4.3. Das Programm SLEBE	26
4.4. Beispiele zu deterministischen Funktionen	30
4.4.1. Harmonische Beanspruchung	30
4.4.2. Blockprogramme	32
4.4.3. Periodische Beanspruchung	32
4.5. Beispiele zu stochastischen Funktionen	35
4.5.1. Schmalbandprozesse	35
4.5.2. Breitbandprozesse	36
4.6. Schadenssummen der Beispiele	40
5. Übersicht zur vorgeschlagenen Lebensdauerberechnung	41
6. Zusammenfassung	43
7. Wesentliche Formelzeichen im Teil I	46

## Inhaltsverzeichnis Teil II

	<u>Seite</u>
1. Einleitung	48
2. Das Zweiteilchen-Sintermodell	50
2.1. Geometrie	50
2.2. Äußere Belastung beim freiwilligen Sintern	51
2.3. Beschreibung der realen Oberflächenkontur	52
2.3.1. Ausbildung von Hinterschneidungen	52
2.3.2. Numerische Simulation der Halskontur	53
2.3.3. Formulierung als Variationsproblem	54
3. Versetzungsvervielfachung in den Gleitebenen	57
3.1. Kritische Quellenspannung	57
3.2. Zeitabhängige Veränderung der Versetzungsdichte	58
4. Schubspannung $\tau_{uv}$ in den Gleitebenen	60
5. Berechnung der Spannungsverteilung mit finiten Elementen	62
5.1. Anwendung der FEM	62
5.2. Ermittlung des elastischen Spannungstensors	64
5.2.1. Verwendete Programme	64
5.2.2. Modellierung der Geometrie und der Belastung	66
5.3. Ergebnisse der Berechnung	70
5.3.1. Schubspannungen $\tau_{uv}$ für verschiedene Winkel	70
5.3.2. Aktivierbare Volumina	70
5.3.3. Vergleich mit gemessenen Versetzungs- dichteverteilungen	72
6. Zusammenfassung	73
7. Wesentliche Formelzeichen im Teil II	76

Literaturverzeichnis ab Seite 77

Anlagen zur Dissertation ab Seite 90

Spektralanalytische Lebensdauerberechnung regellos schwingend  
beanspruchter Bauteile mit FFT

1. Einleitung

Zur Lebensdauerberechnung ist neben der Kennzeichnung des Ermüdungs-Werkstoffverhaltens und der Schadensakkumulationshypothese eine rationelle Beschreibung der Beanspruchungs-Zeit-Funktion erforderlich. Dabei muß die für den Einsatz des Bauteiles typische Beanspruchung erfaßt und so formuliert werden, daß die maßgeblichen Parameter bezüglich der schädigenden Wirkung enthalten sind. Es gilt als erwiesen, daß vor allem die Häufigkeitsverteilungen der Amplituden für die Lebensdauer verantwortlich sind. So ist die Frage, wie oft eine bestimmte Amplitude in einem vorgegebenen Zeitraum auf das Bauteil einwirkt, viel entscheidender für die Lebensdauer als z. B. die Frage, mit welcher Frequenz diese Amplitude vorliegt. Deshalb wird auch gegenwärtig der Nachweis auf Ermüdungsfestigkeit überwiegend auf der Basis von Amplitudenverteilungen geführt. Diese Verteilungen werden durch Klassierung der Beanspruchungs-Zeit-Funktion in gleichabständigen Beanspruchungsstufen ermittelt. Dabei werden Beanspruchungszyklen als Aufeinanderfolge von maximalen und minimalen Extremwerten interpretiert.

Bei einparametrischer Klassierung entsteht ein Beanspruchungskollektiv, das eine direkte Lebensdauerberechnung ermöglicht, wenn das Kollektiv bezüglich einer konstanten Mittelspannung symmetrisch ist. Beispiele dieser Klassierung sind die Zählung der Überschreitungen, die Schwingbreitenzählung, die Zählung aller Maxima und die Zählung regulärer Spitzenwerte /5/.

Im Falle zweiparametrischer Klassierung wird zusätzlich zur Schwingbreite noch deren Lage ermittelt und als momentane Mittelspannung  $\hat{\sigma}_m$  und zugehöriger Amplitude  $\hat{\sigma}_a$  bzw. als Maximum  $\hat{\sigma}$  und darauf folgendes Minimum  $\check{\sigma}$  dargestellt. Im Ergebnis einer derartigen Klassierung entsteht eine Markovsche Übergangsmatrix /6/ (Korrelationsnetz /7/). Um daraus die Lebensdauer berechnen zu können, müssen die Elemente dieser Matrix auf ein einparametrisches und symmetrisches Beanspruchungskollektiv zurückgeführt werden. Dazu sind zusätzliche Annahmen erforderlich, z. B.

die Verwendung von Dauerfestigkeitsschaubildern im Zeitfestigkeitsgebiet bzw. die Einbeziehung mehrerer Wöhlerlinien für verschiedene Mittelspannungen. Beispiele zweiparametrischer Klassierung sind Zählung voller Zyklen, zweiparametrische Spitzenwertzählung, Rainflow-Verfahren /5/. Je nach subjektiver Festlegung des verwendeten Klassierverfahrens und nach Wahl der Methodik zur Konstruktion des einparametrischen Kollektives entstehen für eine gegebene Beanspruchungs-Zeit-Funktion andere Verteilungen und damit andere Lebensdauerwerte. Besonders Beanspruchungen mit regellos schwankenden Mittelspannungen sind verschieden interpretierbar.

In Kenntnis dieser Schwierigkeiten ist die alternative Beschreibung der Beanspruchung mit Hilfe der Spektralanalyse scheinbar naheliegend. Zumindest vom Standpunkt der Dynamik ist dieses Mittel weitestgehend zur Kennzeichnung eines schwingenden Systems geeignet. Die für die Betriebsfestigkeit entscheidende Information über die Art der Verteilungen ist jedoch im Spektrum nicht enthalten bzw. kann nur für Sonderfälle daraus abgeleitet werden. So genügen bereits geringe Phasenverschiebungen zwischen den harmonischen Anteilen, um die Verteilungsfunktion zu ändern und damit die Lebensdauer.

Andererseits bietet die Spektralanalyse den Vorteil, daß sie keine Zuordnung von Beanspruchungszyklen erfordert, weil sie auf der Verarbeitung von Momentanwerten beruht. Dadurch müssen aber mehr Daten bewältigt werden. Die Fortschritte der digitalen Signalanalyse in Verbindung mit neuen Möglichkeiten der Digitalisierung und Abspeicherung großer Datenmengen lassen aber diesen Nachteil zunehmend in den Hintergrund treten. Es gibt daher bereits seit längerer Zeit Bestrebungen, die Spektralanalyse für Lebensdauerberechnungen zu verwenden. Dabei zeigt sich aber, daß bisherige Lösungsansätze über die Gesamtleistung aller Momentanwerte zusätzlich einen Term zur Charakterisierung der Amplitudenverteilung benötigen, um auf die Lebensdauer zu schließen. Also muß auch hier die Verteilung ermittelt oder als bekannt vorausgesetzt werden.

Im Unterschied dazu wird in der vorliegenden Arbeit ein Lösungsweg vorgeschlagen, der neben einer Veränderung der Schadensakkumulationshypothese eine direkte Einbeziehung der Wöhlerlinie bei der Fouriertransformation beinhaltet und dadurch eine durchgängige spektralanalytische Berechnung der Lebensdauer ohne explizite Zuordnung von Beanspruchungszyklen ermöglicht.

## 2. Lebensdauer infolge stochastischer Beanspruchungs-Zeit-Funktionen

### 2.1. Beschreibung der Zufallsvariablen

Eine stochastische Funktion  $X(t)$  besteht im Unterschied zu einer deterministischen Funktion  $x(t)$  aus beliebig vielen Realisierungen  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...  $x_n(t)$ , Bild 1.

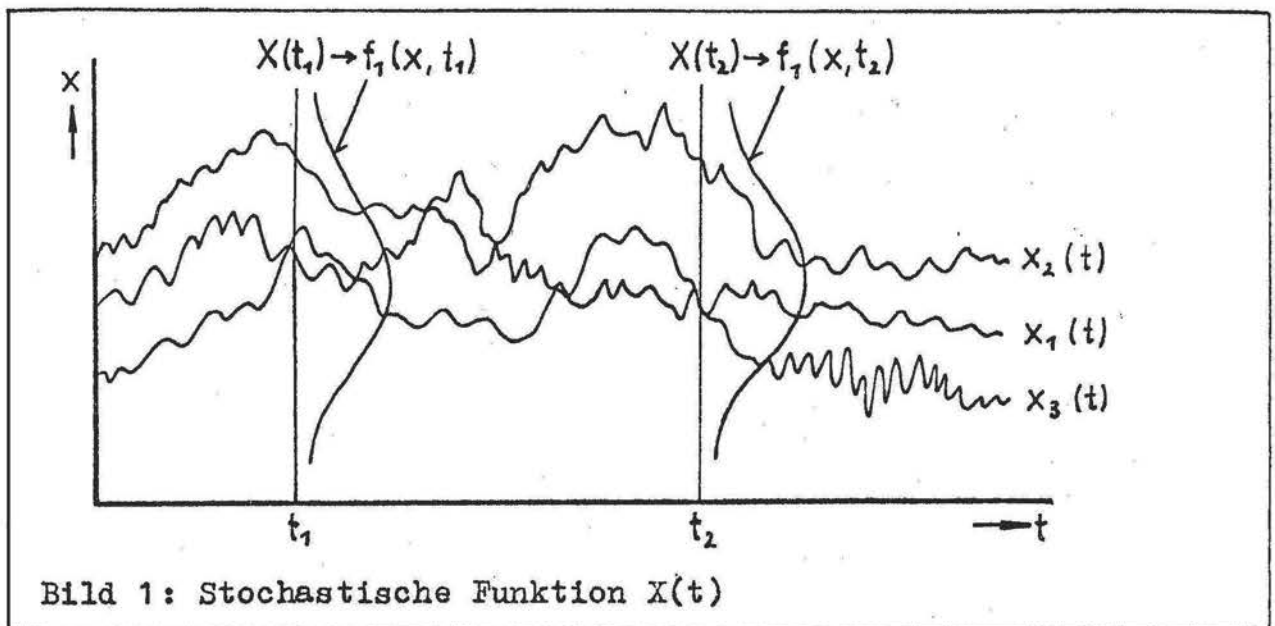


Bild 1: Stochastische Funktion  $X(t)$

Der stochastische Prozeß  $X(t)$  wird für jeden gegebenen Zeitpunkt  $t_1, t_2 \dots t_n$  durch Zufallsvariable  $X(t_1), X(t_2), \dots X(t_n)$  gekennzeichnet. Diese Zufallsvariablen besitzen die  $n$ -dimensionale Verbundwahrscheinlichkeitsverteilung  $F_n$  /8/:

$$F_n(x_i, t_i) = P \left[ (X(t_1) \leq x_1) \cap (X(t_2) \leq x_2) \cap \dots \cap (X(t_n) \leq x_n) \right] \quad (1)$$

Die Verteilung  $F_n$  gibt die Wahrscheinlichkeit  $P$  dafür an, daß die zum Prozeß gehörenden Zufallsvariablen  $X$  zu den Zeitpunkten  $t_i$  jeweils kleiner oder gleich den vorgegebenen Werten  $x_i$  sind.



Aus (1) folgt die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte  $f_n$ :  
(sofern die Ableitungen nach  $x_i$  existieren)

$$f_n(x_i, t_i)_{i=1}^n = \frac{\partial^n F_n(x_i, t_i)_{i=1}^n}{\prod_{i=1}^n \partial x_i} \quad (2)$$

Eine andere Möglichkeit zur Charakterisierung der Zufallsvariablen besteht in der Formulierung statistischer Momente. Diese sind spezielle Erwartungswerte und werden aus Integrationen über die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte gebildet:

$$E \left\{ \prod_{i=1}^n X(t_i) \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \prod_{i=1}^n x_i \right] \cdot f_n(x_i, t_i)_{i=1}^n dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (3)$$

Dabei sind die ersten beiden Momente von besonderer Bedeutung und im allgemeinen auch meßtechnisch mit vertretbarem Aufwand ermittelbar:

Moment 1. Ordnung: Mittelwertfunktion

$$E \{ X(t) \} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_1(x, t) dx \quad (4)$$

Moment 2. Ordnung: Autokorrelationsfunktion

$$E \{ X(t_1) \cdot X(t_2) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (5)$$

Die mathematische Bearbeitung stochastischer Funktionen wird unter folgenden zwei Voraussetzungen wesentlich erleichtert:

#### a) Stationarität

- Die Dichtefunktion und damit auch die Momente sind in diesem Fall invariant gegenüber einem beliebigen Zeit-Nullpunkt. Damit wird die eindimensionale Dichtefunktion  $f_1(\dots)$  zeitunabhängig. Aus (4) und (5) folgt:

$$\mu_x = E \{ X(t) \} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot f_1(x_1) dx_1 = \text{const.} \quad (6)$$

$$K_x(\tau) = E \{ X(t_1) \cdot X(t_2) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot f_2(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 \quad (7)$$

Die Autokorrelationsfunktion ist jetzt nur noch von der Zeitdifferenz  $\tau = t_2 - t_1$  abhängig. Für  $\tau = 0$  entsteht daraus der quadratische Mittelwert

$$K_x(\tau=0) = E\{X^2(t)\} \cong K_x(\tau \neq 0) \quad (8)$$

Für zentrierte Funktionen, d. h.  $E\{X(t)\} = 0$ , ist der quadratische Mittelwert mit der Dispersion  $D^2\{X(t)\}$  des Prozesses identisch. Das folgt aus dem zentralen Moment 2. Ordnung:

$$D^2\{X\} = E\{X^2\} - (E\{X\})^2 \quad (9)$$

- Für stationäre Prozesse gelten die Wiener-Chintschin-Relationen /8/ zwischen der Spektraldichte  $\tilde{S}_x$  und der Autokorrelationsfunktion  $K_x(\tau)$ :

$$\tilde{S}_x(\omega) = F\{K_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} \cdot K_x(\tau) d\tau \quad (10)$$

$$K_x(\tau) = F^{-1}\{\tilde{S}_x(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{+j\omega\tau} \cdot \tilde{S}_x(\omega) d\omega \quad (11)$$

$\omega = 2\pi f$  : Kreisfrequenz und  $j = \sqrt{-1}$

Die Autokorrelationsfunktion als Moment 2. Ordnung kann demzufolge durch die Spektraldichte  $\tilde{S}_x(\omega)$  im Frequenzbereich ohne Informationsverlust ersetzt werden. Somit ist ein stationärer, zentrierter Prozeß vollständig durch seine Spektraldichte beschreibbar, wenn man sich auf die Korrelationstheorie beschränkt, die nur die ersten beiden Momente berücksichtigt.

#### b) Ergodizität

Eine einzige, zufällig ausgewählte Realisierung  $x_1(t)$  eines stationären ergodischen Prozesses enthält sämtliche Informationen über die Wahrscheinlichkeitseigenschaften dieses Prozesses. Deshalb kann die Erwartungswertbildung über alle Realisierungen (Ensemble-Mittelung) durch zeitliche Mittelungen über diese eine Realisierung ersetzt werden, wenn der betrachtete Zeitraum  $T$  gegen  $\infty$  geht:

$$\mu_x = E\{X(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t) dt \quad (12)$$

$$K_x(\tau) = E\{X(t_1) \cdot X(t_1 + \tau)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x_1(t) - \mu_x] \cdot [x_1(t + \tau) - \mu_x] dt \quad (13)$$

usw.

Nur bei ergodischen Beanspruchungs-Zeit-Funktionen ist also die Beschränkung auf eine einzige Realisierung gerechtfertigt, an der z. B. Amplitudenverteilungen oder spektrale Schätzwerte für den gesamten Prozeß ermittelt werden können.

## 2.2. Der stationäre ergodische Gaußprozeß

Für diesen Prozeß existieren analytische Lösungen zur Lebensdauerabschätzung. Außerdem wurden typische Beanspruchungsverläufe als Gauß'sche Prozesse identifiziert /9 - 11/ bzw. ließen sich auf die Überlagerung mehrerer Gaußprozesse zurückführen /12 - 13/.

Die gute analytische Handhabung dieses Prozesses ergibt sich daraus, daß die Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  nach n-dimensionalen Gauß'schen Wahrscheinlichkeitsdichten verteilt sind. Folglich lassen sich alle Parameter dieser Verteilungen aus der zweidimensionalen Gauß'schen Dichtefunktion:

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi x_{eff1} \cdot x_{eff2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[ \left(\frac{x_1}{x_{eff1}}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_{eff2}}\right)^2 \right]\right\} \quad (14)$$

mit  $x_{eff1}, x_{eff2}$ : Effektivwerte der Zufallsvariablen  $X_1$  und  $X_2$

(Gleichung (14) ist hier angegeben für einen zentrierten Prozeß ohne Korrelation zwischen  $X_1$  und  $X_2$ )

ableiten bzw. aus der Autokorrelationsfunktion als Moment 2. Ordnung oder aus der Spektraldichte.

Die Momentanwerte des Prozesses sind normalverteilt, d. h. die eindimensionale Dichtefunktion der momentanen Beanspruchungen  $\hat{\sigma}(t)$  einer Gauß'schen Beanspruchungs-Zeit-Funktion lautet:

$$f_1(\hat{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \hat{\sigma}_{eff}^2}} \cdot \exp\left[-\frac{\hat{\sigma}^2}{2\hat{\sigma}_{eff}^2}\right] \quad (15)$$

Die Maxima  $\hat{\sigma}$  sind nicht normalverteilt. Sie besitzen eine Rice-Verteilung /14 - 15/:



$$f_1(\hat{\sigma}) = \sqrt{\frac{1-i}{2\pi\hat{\sigma}_{eff}^2}} \cdot \exp\left[-\frac{\hat{\sigma}^2}{2\hat{\sigma}_{eff}^2(1-i^2)}\right] + i \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_{eff}^2} \cdot \exp\left[-\frac{\hat{\sigma}^2}{2\hat{\sigma}_{eff}^2}\right] \cdot \Phi(\lambda) \quad (16)$$

mit  $\Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} \exp\left[-\frac{h^2}{2}\right] dh$  und  $\lambda = \frac{i \cdot \hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_{eff} \cdot \sqrt{1-i^2}}$

sowie  $i$ : Regellosigkeitskoeffizient als Quotient aus der Anzahl  $n_0$  positiver Nulldurchgänge und Anzahl  $n_1$  der Maxima  $\hat{\sigma}$ :

$$i = \frac{n_0}{n_1} \quad (17)$$

Die Dichtefunktion der Minima  $f_1(\check{\sigma})$  ist die gegen den Erwartungswert gespiegelte Funktion der Maxima  $f_1(\hat{\sigma})$ , Anlage A1.

Kowalewski /15/ und Sjöström /16/ haben in Anlehnung an die Ergebnisse von Rice unabhängig voneinander eine spezielle zweidimensionale Dichtefunktion der Amplituden  $\hat{\sigma}_a$  und zugehöriger Mittelspannungen  $\hat{\sigma}_m$ , siehe Anlage A1, vorgeschlagen:

$$f_2(\hat{\sigma}_m, \hat{\sigma}_a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot S_m}} \cdot \exp\left[-\frac{\hat{\sigma}_m^2}{2S_m}\right] \cdot \frac{\hat{\sigma}_a}{S_a} \cdot \exp\left[-\frac{\hat{\sigma}_a^2}{2S_a}\right] \quad (18)$$

mit  $S_m$ : Dispersion der Mittelspannungen:  $S_m = \hat{\sigma}_{eff}^2 \cdot (1-i^2)$

$S_a$ : Dispersion der Amplituden:  $S_a = i^2 \cdot \hat{\sigma}_{eff}^2$

Gleichung (18) kann zur prozeßrechnergesteuerten Erzeugung Gauß'scher Beanspruchungsprozesse eingesetzt werden. Als Parameter sind lediglich der Effektivwert und der Regellosigkeitskoeffizient für diese Dichtefunktion zu variieren. Dabei ist es üblich, die Dichtefunktion durch die Transformation:

$$f_2(\hat{\sigma}, \check{\sigma}) = \frac{1}{2} \cdot f_2(\hat{\sigma}_a, \hat{\sigma}_m) \quad (19)$$

auf Extremwerte zu beziehen und eine Markovsche Übergangsmatrix  $\underline{M}$  /17/ zu berechnen, deren Elemente maßgeblich durch die Dichtefunktion bestimmt werden:

$$\underline{M}(k, l) = \underline{M}(\hat{\sigma}, \check{\sigma}) - f_2(\hat{\sigma}, \check{\sigma}) \cdot \Delta u^2 \quad (20)$$

mit  $\Delta u$ : auf  $\hat{\sigma}_{eff}$  normierte Klassenbreite, Klasse  $k$  der Maxima, Klasse  $l$  der Minima und  $1 \leq \{k, l\} \leq m$  (Klassenanzahl)

Der Wertevorrat der Übergangsmatrix wird dann mit Hilfe gleichverteilter Zufallszahlen in eine Extremwertfolge überführt. Diese stellt mathematisch die Realisierung einer homogenen Markovschen Kette mit  $m$  Zuständen dar.

Darüber hinaus ist Gleichung (18) zur Berechnung der Schädigung breitbandiger Gauß'scher Beanspruchungsprozesse verwendbar, siehe Abschnitt 2.3.2.

### 2.3. Lebensdauerberechnung für stationäre ergodische Gaußprozesse

#### 2.3.1. Schmalbandprozeß

Eine geschlossene Lösung wurde erstmalig von Miles /18/ unter Verwendung der Gammafunktion angegeben:

$$\sigma_r = \Gamma\left(\frac{f}{2} + 1\right)^{\frac{1}{f}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma_{eff} \quad (21)$$

mit  $\sigma_r$ : reduzierter Spannungshorizont, bei der die Lebensdauer nach Miles eintritt:

$$N_{Mi} = K_w \cdot \sigma_r^{-f} \quad (22)$$

Gleichung (22) entspricht der Geradengleichung der Wöhlerlinie in doppeltlogarithmischer Darstellung mit den Konstante  $K_w$  und  $f$ . Durch Einsetzen von (21) in (22) entsteht die Miles'sche Lebensdauer  $N_{Mi}$  in Abhängigkeit vom Effektivwert:

$$N_{Mi} = \frac{K_w}{\Gamma\left(\frac{f}{2} + 1\right) \cdot 2^{\frac{1}{f}} \cdot \sigma_{eff}^f} \quad (23)$$

Der Effektivwert ist dabei aus der Integration der Spektraldichte über alle Frequenzen ermittelbar:

$$\sigma_{eff}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}_\sigma(\omega) d\omega \quad (24)$$

Die Spektraldichte kann entweder aus dem Amplitudendichtespektrum oder aus der Autokorrelationsfunktion berechnet werden.

Die Herleitung der Gleichung (23) basiert auf der linearisierten Lebensdauerformel nach Corten und Dolan /19/, d. h. auf der Hypothese nach Palmgren /20/ und Miner /21/ ohne Berücksichtigung der Dauerfestigkeitsgrenze:

$$N_M = \frac{\sum_{K=1}^m n_K}{\sum_{K=1}^m \frac{n_K}{N_K}} \quad (25)$$

mit  $n_K$  : Anzahl der Schwingspiele je Stufe  $k$

$N_K$  : ertragbare Schwingspielzahl der Stufe  $k$

$m$  : Anzahl der Stufen einer Teilfolge

$N_M$  : Lebensdauer nach Palmgren/Miner ohne Dauerfestigkeit

Werden die Summen in (25) durch Integrale über die Häufigkeitsdichte  $p_1(\hat{\sigma})$  der Maxima ersetzt, so entsteht z.B.

$$\sum_{K=1}^m n_K = \int_0^{\infty} p_1(\hat{\sigma}) d\hat{\sigma} = n_1 \cdot \int_0^{\infty} f_1(\hat{\sigma}) d\hat{\sigma} \quad (26)$$

wegen  $p_1(\hat{\sigma}) = n_1 \cdot f_1(\hat{\sigma})$

Außerdem sei ein Schmalbandprozeß vorausgesetzt mit der Regellosigkeit  $i = 1,0$ . Dann geht die Rice-Verteilung (16) in eine Rayleigh-Verteilung über:

$$f_1(\hat{\sigma}) = \frac{\hat{\sigma}}{\sigma_{eff}^2} \cdot \exp\left[-\frac{\hat{\sigma}^2}{2 \cdot \sigma_{eff}^2}\right] \quad (27)$$

Mit der Wöhlerliniengleichung

$$N(\hat{\sigma}) = K_w \cdot \hat{\sigma}^{-p} \quad (28)$$

unter Berücksichtigung von (27) und (26) kann (25) umgeformt werden zu

$$N_{M_i} = \frac{K_w \cdot \int_0^{\infty} \hat{\sigma} \cdot \exp\left[-\frac{\hat{\sigma}^2}{2 \cdot \sigma_{eff}^2}\right] d\hat{\sigma}}{\int_0^{\infty} \hat{\sigma}^{(p+1)} \cdot \exp\left[-\frac{\hat{\sigma}^2}{2 \cdot \sigma_{eff}^2}\right] d\hat{\sigma}} \quad (29)$$

Gleichung (29) wurde von Miles /18/ wesentlich vereinfacht, indem er die Integrale durch die vollständige Gammafunktion ersetzte:

$$\Gamma(z+1) = 2^{-z} \int_0^{\infty} x^{2z+1} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right] dx \quad (30)$$

Dadurch entsteht aus (29) direkt Gleichung (23). Die Miles'sche Formel stellt also die Anwendung der Palmgren/Miner-Formel ohne Dauerfestigkeit auf einen stationären ergodischen schmalbandigen Gaußprozeß dar.

Bolotin /22/ entwickelte dazu eine allgemeinere Lösung mit Berücksichtigung der Dauerfestigkeit  $\sigma_D$ . Das bedeutet in Gleichung (25) Summierung nur bis  $1 < m$  im Nenner für 1: Anzahl der Stufen über der Dauerfestigkeit, bzw. in Gleichung (29) Integration im Nenner von  $\sigma_D$  bis  $\infty$  statt vorher 0 bis  $\infty$ . Dieses Integral kann nach Bolotin /23/ durch das Produkt aus der oben beschriebenen Gammafunktion und der komplementären Pearsonschen  $\chi^2$ -Verteilungsfunktion  $\text{prs}_n(\chi^2)$  ersetzt werden:

$$\Gamma(z+1) \cdot \text{prs}_{2(z+1)}(x_0^2) = 2^{-z} \int_{x_0}^{\infty} x^{2z+1} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right] dx \quad (31)$$

Damit entsteht die Lebensdauer  $N_{B_0}$  nach Bolotin:

$$N_{B_0} = \frac{K_w}{\Gamma\left(\frac{f}{2}+1\right) \cdot \text{prs}_{(f+2)}\left(\frac{\sigma_D^2}{\sigma_{\text{eff}}^2}\right) \cdot 2^{\frac{f}{2}} \cdot \sigma_{\text{eff}}^f} \quad (32)$$

Für  $\sigma_D = 0$  wird die Funktion  $\text{prs}$  zu 1, und es ergibt sich wieder die Miles'sche Formel.

Nach Wirsching und Haugen /24/ gilt für den Gauß'schen Schmalbandprozeß /25/:

$$\Lambda = N_p \cdot \beta_1^*(\psi) \cdot g(\psi, i^*) \cdot \sigma_{\text{eff}}^{\psi} \quad (33)$$

mit

$$\beta_1^*(\psi) = 2^{\frac{\psi}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{\psi}{2} + 1\right)$$

$$g(\psi, i^*) = 1$$

Dabei sind  $\Lambda$  und  $\psi$  als Wöhlerlinienkonstanten interpretierbar:

$$\Lambda = K_w, \quad \psi = f$$

und  $N_p = N_{WH}$  Lebensdauer nach Wirsching und Haugen.

Damit entsteht aus (33):

$$K_w = N_{WH} \cdot 2^{\frac{f}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{f}{2} + 1\right) \cdot \sigma_{\text{eff}}^f \quad (34)$$

also wieder die Miles'sche Formel (23), wenn nach  $N_{WH}$  umgestellt wird.

Nach Rajcher /26/ wird die Lebensdauer aus Spektralwerten in folgender Weise /27/ berechnet:

$$T_R = \frac{A}{L(m) \left[ \int_0^\infty \tilde{G}(f) \cdot f^{\frac{2}{m}} df \right]^{\frac{m}{2}}} \quad (35)$$

mit  $A = K_w$ ,  $m = p$ ,  $L(m) = 2^{\frac{p}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{p}{2} + 1\right)$

$\tilde{G}(f)$  : einseitige Spektraldichte der Beanspruchungs-Zeit-Funktion

$T_R$  : Lebensdauerzeit nach Rajcher

Im Falle eines Schmalbandprozesses lassen sich der Zeit  $T_R$  Schwingspiele zuordnen:

$$N_{Raj} = T_R \cdot f_0 \quad (36)$$

mit  $N_{Raj}$  : Lebensdauer nach Rajcher und  $f_0$  : charakteristische Frequenz.

Beim Schmalbandprozeß ist die Gesamtleistung auf der Frequenz  $f_0$  konzentriert:

$$S_{\sigma_{ges}} = \sigma_{eff}^2 = \int_0^\infty \tilde{G}(f) df \approx G(f_0) \quad (37)$$

Einsetzen von (37) und (36) in (35) liefert:

$$N_{Raj} = \frac{f_0 \cdot K_w}{L(p) \cdot \left[ \sigma_{eff}^2 \cdot f_0^{\frac{2}{p}} \right]^{\frac{p}{2}}} \quad (38)$$

Das entspricht ebenfalls der Miles'schen Formel.

### 2.3.2. Breitbandprozesse

Rajcher erfaßt bei der Spektralanalyse alle Frequenzen, so daß die Formel (35) pauschal auch für Breitbandprozesse anwendbar und mit keinem größeren Aufwand als beim Schmalbandprozeß verbunden ist. Gegen die Gleichung (35) ist einzuwenden, daß der Faktor  $L(m)$  eindeutig in der angegebenen Form rayleighverteilte Maxima charakterisiert und nicht die für Breitbandprozesse gültige Rice-Verteilung.

Ein anderer Weg zur Lebensdauerberechnung für einen Gauß'schen Breitbandprozeß  $Z(t)$  besteht in der Überlagerung /28/, /29/, /23/ zweier Prozesse  $X(t)$  und  $Y(t)$ :

$$Z(t) = X(t) + Y(t) \quad (39)$$

Es sei  $Y(t)$  ein höherfrequenter Prozeß gegenüber  $X(t)$  mit der charakteristischen Frequenz  $f_{oy}$ .

Dann kann als unbekannte Lebensdauer  $N_{LB}$  des Breitbandprozesses die Anzahl der "Oberschwingungen" mit der Frequenz  $f_{oy}$  gelten. Die Anzahl  $dn$  der Oberschwingungen im Gebiet  $\{(x \text{ bis } x + dx) \cdot (y \text{ bis } y + dy)\}$  wird aus der zweidimensionalen Dichtefunktion berechnet:

$$dn = N_{LB} \cdot f_2(x, y) dx dy \quad (40)$$

Bei linearer Schädigung entsteht nach diesen  $dn$  Schwingspielen folgender Schädigungsanteil

$$dD = \frac{dn}{N} \quad (41)$$

Hier ist  $N$  abhängig von  $x$  und  $y$ , d. h., es wird ein Wöhlerliniensystem  $N(x, y)$  benötigt.

Die Integration der Schädigung von  $D = 0$  bis 1 liefert die gesuchte Lebensdauer:

$$N_{LB} = \frac{1}{\int_x \int_y \frac{f_2(x, y)}{N(x, y)} dx dy} \quad (42)$$

Die zweidimensionale Dichtefunktion ist bei statistischer Unabhängigkeit in das Produkt zweier eindimensionaler Dichtefunktionen zerlegbar:

$$f_2(x, y) = f_1(x) \cdot f_1(y) \quad (43)$$

Weiterhin kann die Berechnung durch die Zurückführung des Wöhlerliniensystems  $N(x, y)$  auf eine eindimensionale Ersatz-Wöhlerlinie vereinfacht werden.

Bolotin /28//23/ verwendet für  $x = \hat{\sigma}$  und für  $y = \check{\sigma}$ . Diese Extremwerte gewinnt er durch Zerlegung der Beanspruchungs-Zeit-Funktion in einfache und nicht einfache Beanspruchungszyklen. Anschließend werden die nicht einfachen Zyklen durch entsprechende einfache ersetzt und insgesamt Maxima und Minima ermittelt. Das Wöhlerliniensystem wird mit Hilfe eines theoretisch begründeten Ansatzes zu einer Ersatz-Wöhlerlinie umgeformt.



Hänel /29//30/ geht von der speziellen zweidimensionalen Dichtefunktion (18) nach Kowalewski und Sjöström aus, verwendet also normalverteilte Mittelspannungswerte  $\sigma_m$  und rayleighverteilte Amplituden  $\sigma_a$  als statistisch unabhängige charakteristische Prozeßkenngrößen:

$$f_2(\sigma_m, \sigma_a) = f_1(\sigma_a) \cdot f_1(\sigma_m) \quad (44)$$

Die Reduktion des Wöhlerliniensystems  $N(\sigma_a, \sigma_m)$  auf  $N(\sigma_r^x)$  erfolgt durch die experimentell begründete Beziehung:

$$\sigma_r^x = \sigma_a + \psi \cdot \sigma_m \quad (45)$$

hier  $\psi$ : Asymmetriefaktor bzw. Mittelspannungsempfindlichkeit  
Auch durch die Vereinfachungen (44) und (45) ist die Gleichung (42) nicht geschlossen analytisch lösbar. Mit Hilfe einer Reihenentwicklung leitete Hänel folgende Formel ab:

$$N_{LB} = \frac{K_w}{\tilde{L}(\psi, \psi, i) \cdot 2^{\frac{p}{2}} \cdot \sigma_{eff}^p} \quad (46)$$

mit:

$$\tilde{L}(\psi, \psi, i) = \frac{i^p}{\sqrt{\pi^p}} \sum_{j=0}^p \left\{ \binom{p}{j} \cdot \left( \frac{\psi}{i} \sqrt{1-i^2} \right)^j \cdot \Gamma\left(\frac{j}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{p-j+2}{2}\right) \right\} \quad (47)$$

und  $\binom{p}{j}$  Binominalkoeffizienten,  $p$  ganzzahlig

(Gegenüber der Schreibweise in /30/ wurden hier  $\sigma_{eff}$  und  $K_w$  explizit dargestellt).

Gleichung (46) entspricht der Palmgren/Miner-Formel ohne Dauerfestigkeit, angewendet auf Gauß'sche Breitbandprozesse. Wird zusätzlich die Dauerfestigkeitsgrenze  $\sigma_D$  analog zur Herleitung nach Bolotin (32) verwendet, so entsteht für  $\tilde{L}$  ein umfangreicherer Ausdruck.

### 3. Verteilungsfreie Lebensdauerberechnung

#### 3.1. Voraussetzungen für Verteilungsfreiheit

Die im vorangegangenen Abschnitt dargelegten und im Sinne der Spektralanalyse nutzbaren Lösungsansätze basieren auf einer linearen Schadensakkumulationshypothese. Nur das Ergebnis einer linearen Schädigung ist unabhängig von der Permutation der Beanspruchungsstufen und repräsentiert damit eine Mittelwertbildung über alle Schadenszuwüchse  $dD_K$  der Stufen  $K = 1$  bis  $m$ .

Diese Schadenszuwüchse entstehen aus dem Produkt von Schwingspielen  $n_K$  und Schädigungsanstiegen  $1/N_K$  der Stufen  $K(\Delta D_K)$ :

$$dD_K = n_K \cdot \frac{1}{N_K} = n_K \cdot \Delta D_K \quad (48)$$

Die linearen Schädigungsanstiege  $1/N_K$  seien als "Stufen-Schädigungsgradienten" bezeichnet.

Behauptung 1: Die Formel von Palmgren/Miner ohne Dauerfestigkeit stellt eine arithmetische Mittelung von Stufen-Schädigungsgradienten dar.

Beweis: Gleichung (25) lautet in reziproker Darstellung:

$$\frac{1}{N_M} = \frac{1}{\sum_{K=1}^m n_K} \cdot \sum_{K=1}^m n_K \cdot \frac{1}{N_K} \quad (49)$$

Das entspricht der Formel für die arithmetische Mittelung diskreter Werte:

$$\bar{x}_K = \frac{1}{\sum_{K=1}^m h_K} \cdot \sum_{K=1}^m h_K \cdot x_K \quad (50)$$

wegen  $h_K = n_K$ : absolute Häufigkeit in der Stufe  $K$ .

In Gleichung (49) werden also diskrete Werte  $1/N_K$  zu einem Wert  $\overline{\Delta D_K}$  gemittelt. Damit läßt sich Gleichung (25) auch in folgender Form schreiben:

$$N_M = \frac{1}{\overline{\Delta D_K}} \quad (51)$$

Ein direkter Zusammenhang zwischen dem Effektivwert aller Momentanwerte und dem arithmetischen Mittelwert von Amplituden existiert nicht. Das ist auch der Grund, warum bei den vorge-



stellten Theorien neben dem Effektivwert stets ein zusätzlicher Funktions-Term L zur Charakterisierung der Amplitudenverteilung benötigt wird.

Um von der Amplitudenverteilung unabhängig zu werden, muß die Lebensdauer auf einen anderen Amplituden-Mittelwert bezogen werden, der einen einfachen und allgemein gültigen Zusammenhang zum Effektivwert der Momentanwerte liefert. Dafür geeignet ist der quadratische Mittelwert.

**Behauptung 2:** Gegeben sei eine zentrierte Sinusfunktion  $x(t)$  konstanter Frequenz ohne Mittelspannungsschwankungen, deren Amplitude in  $m$  aufeinanderfolgenden Blöcken jeweils konstant unterschiedlich ist (Blockprogramm). Dann gilt zwischen dem quadratischen Mittelwert  $\overline{x_K^2} = \sqrt{x_K^2}$  der Amplituden  $x_K$  und dem Effektivwert  $x_{\text{eff ges}}$  aller Momentanwerte die Beziehung:

$$\overline{x_K^2} = \sqrt{2} \cdot x_{\text{eff ges}} \quad (52)$$

**Beweis:** Die Gesamtleistung  $S_{x_{\text{ges}}}$  als Quadrat des Effektivwertes  $x_{\text{eff ges}}$  entsteht aus einer arithmetischen Mittelung der Leistungen  $S_{x_K}$  der einzelnen Stufen  $K$ :

$$S_{x_{\text{ges}}} = x_{\text{eff ges}}^2 = \frac{1}{h_{\text{ges}}} \sum_{K=1}^m h_K \cdot S_{x_K} \quad (53)$$

mit  $h_{\text{ges}}$ : Gesamthäufigkeit der Sinusperioden in einer Teilfolge

$h_K$ : Häufigkeit der Sinusperioden in der Stufe  $K$

$m$ : Anzahl der Blöcke in einer Teilfolge

Außerdem gilt:

$$S_{x_K} = x_{\text{eff K}}^2 \quad (54)$$

$$x_K = \sqrt{2} \cdot x_{\text{eff K}} \quad (55)$$

Einsetzen von (55) und (54) in (52) liefert

$$2 \cdot x_{\text{eff ges}}^2 = \frac{1}{h_{\text{ges}}} \cdot \sum_{K=1}^m h_K \cdot x_K^2 \quad (56)$$

oder

$$\sqrt{2} \cdot x_{\text{eff ges}} = \sqrt{\frac{1}{h_{\text{ges}}} \cdot \sum_{k=1}^m h_k \cdot x_k^2} \quad (57)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist der quadratische Mittelwert  $\overline{x_k^2}$ .

### 3.2. Vorschlag einer neuen Formel zur Berechnung der Lebensdauer

Der Effektivwert der Momentanwerte ist also nur über einen konstanten Faktor mit dem quadratischen Mittelwert der Amplituden verknüpft.

Es wird deshalb anstelle der Gleichung (51) für die Lebensdauerberechnung ein quadratischer Mittelwert  $\overline{\Delta D_k^2}$  vorgeschlagen:

$$N_L = \frac{1}{\overline{\Delta D_k^2}} \quad (58)$$

Der quadratische Mittelwert ist stets eine obere Schranke für den arithmetischen Mittelwert. Daraus folgt

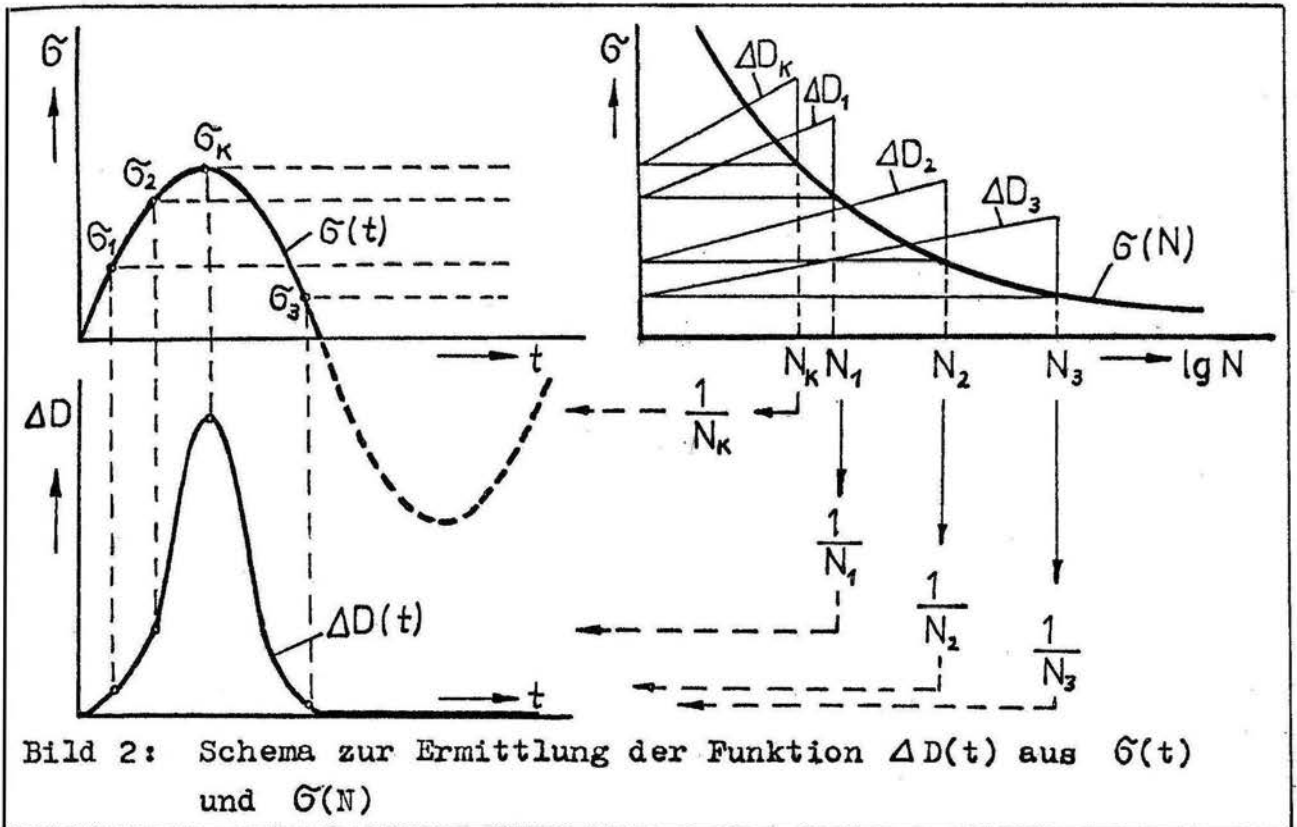
$$N_L \leq N_M \quad (59)$$

also eine kürzere Lebensdauer  $N_L$  gegenüber  $N_M$  nach Palmgren/Miner.

Eine spektralanalytische Berechnung der Gleichung (58) erfordert die Ermittlung eines Effektivwertes. Dieser muß notwendig vom gleichen Funktionstyp wie der quadratische Mittelwert der Amplituden sein, damit eine Beziehung der Art (52) genutzt werden kann. Wenn also die Amplituden Schädigungsgradienten sind, muß auch der Effektivwert aus Schädigungsgradienten-Momentanwerten berechnet werden, d. h. aus einer Schädigungsgradienten-Zeit-Funktion  $\Delta D(t)$ . Im folgenden sei diese als "Schädigungsgradientenfunktion" bezeichnet.

Die Gradientenfunktion wird über die Wöhlerlinie ermittelt, Bild 2.

Bevor der Amplitudenwert  $\sigma_K$  erreicht ist, werden zunächst niedrigere Spannungshorizonte  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  „durchfahren“, deren Schädigungsvermögen wegen  $N_2 > N_1 > N_K$  geringer ist, die Anstiege (Schädigungsgradienten) sind kleiner. Negative Momentanwerte  $\sigma(t)$  werden nicht berücksichtigt, weil bei einer zentrierten Funktion immer Wertepaare im gleichen Abstand zum Erwartungswert



existieren. Das Schädigungsvermögen wird deshalb in Anlehnung an die Wöhlerliniendarstellung nur oberhalb des Erwartungswertes in jedem Momentanwert paarweise konzentriert angenommen. Die Wöhlerlinie kann in beliebiger Form vorliegen, z. B. nach Stüssi /32/, Wirthgen /33/, Lammel /34/ oder als Gerade im doppeltlogarithmischen System.

Wird die Geradengleichung (28) zur Beschreibung der Wöhlerlinie genutzt, so entsteht daraus folgende spezielle Schädigungsgradientenfunktion im Zeitfestigkeitsgebiet:

$$\Delta D(t) = \frac{1}{K_w} \cdot \sigma^p(t) \quad (60)$$

Im Dauerfestigkeitsgebiet sind Variationen z. B. nach Corten/Dolan /35/, Miner /21/ oder Haibach /36/ anwendbar.

### 3.3. Ermittlung des Effektivwertes $\Delta D_{\text{eff}}$

Der Effektivwert der Schädigungsgradientenfunktion kann auf verschiedenen Wegen berechnet werden:

a) Als quadratischer Mittelwert der Momentanwerte  $\Delta D(t)$ :

$$\Delta D_{\text{eff}}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Delta D^2(t) dt \quad (61)$$

Das entspricht der Autokorrelationsfunktion  $K_{\Delta D}$  für zentrierte, stationäre ergodische Prozesse bei  $\gamma = 0$ , siehe Gleichung (13).

b) Spektralanalytisch aus der Gesamtleistung:

$$\Delta D_{\text{eff}}^2 = S_{\Delta D_{\text{ges}}} = \int_0^{\infty} \tilde{G}_{\Delta D}(f) df \quad (62)$$

Die einseitige Spektraldichte  $\tilde{G}_{\Delta D}(f)$  der Schädigungsgradientenfunktion wird aus der komplexen Amplitudendichte  $\tilde{A}_{\Delta D}(jf)$  berechnet:

$$\tilde{G}_{\Delta D}(f) = 2 \cdot \tilde{A}_{\Delta D}(jf) \cdot \tilde{A}_{\Delta D}^*(jf) df = \frac{2 \cdot |\tilde{A}_{\Delta D}(jf) df|^2}{df} \quad (63)$$

mit  $\tilde{A}_{\Delta D}^*(jf)$  : konjugiert komplexe Größe zu  $\tilde{A}_{\Delta D}(jf)$

und  $j = \sqrt{-1}$

Die Amplitudendichte entsteht aus einer Fouriertransformation der reellen Zeitfunktion  $\Delta D(t)$ :

$$\tilde{A}_{\Delta D}(jf) = \mathcal{F}\{\Delta D(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta D(t) \cdot \exp(-j \cdot 2\pi f t) dt \quad (64)$$

$\tilde{A}_{\Delta D}(jf)$  ist das auf ein Frequenzintervall  $df$  bezogene Amplitudenspektrum  $A_{\Delta D}(jf)$ .

### 3.4. Zusammenhang zwischen $\overline{\Delta D_K^2}$ und $\Delta D_{\text{eff}}$

Weil  $\Delta D(t)$  eine mit  $\varphi$  potenzierte Sinusfunktion  $G(t)$  darstellt, ist die Beziehung (52) nicht mehr gültig.

Behauptung 3: Für eine zentrierte Beanspruchungs-Zeit-Funktion  $G(t)$  konstanter Frequenz ohne Mittelwertschwankung (Schmalbandprozeß) gilt:

$$\overline{\Delta D_K^2} = u(\varphi) \cdot \Delta D_{\text{effges}} \quad (66)$$

mit dem Faktor

$$u(\varphi) = \sqrt{\frac{\varphi!}{\prod_{l=1}^{\varphi} (l - \frac{1}{2})}} \quad (67)$$

für ganzzahlige Exponenten  $\varphi$ . Für beliebige  $\varphi$  gilt:

$$u(\varphi) = \sqrt{\frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\varphi+1)}{\Gamma(\frac{\varphi}{2} + 1)}} \quad (67a)$$

Beweis: a) Zunächst für eine Stufe K:

Gegeben sei die Beanspruchungs-Zeit-Funktion

$$\sigma(t) = \sigma_K \cdot \sin \omega t \quad (68)$$

der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f$ .

Der quadratische Mittelwert  $\overline{\Delta D_K^2}$  geht in diesem Fall über in den Stufen-Schädigungsgradienten  $\Delta D_K$ :

$$\overline{\Delta D_K^2} \rightarrow \Delta D_K = \frac{1}{K_w} \cdot \sigma_K^p \quad (69)$$

Aus (69) und (66) folgt

$$u(\varphi) = \Delta D_K / \Delta D_{\text{eff}K} \quad (70)$$

bzw.

$$\frac{1}{u^2} = \left( \frac{\Delta D_{\text{eff}K}}{\Delta D_K} \right)^2 \quad (71)$$

Einsetzen von (61), (68) und (69) in (71) liefert:

$$\frac{1}{u^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin^{2\varphi} \omega t dt \quad (72)$$

In Abhängigkeit von  $\varphi$  entstehen verschiedene Werte für  $1/u^2$  (Lösung der Integrale nach /37/):

$$\varphi=1: \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \left( \frac{1}{2} t - \frac{1}{4\omega} \sin 2\omega t \right) \Big|_0^T \right\} = \frac{1}{2} \quad (73)$$

(Daraus folgt die bekannte Beziehung (55) für  $x(t) = x_K \cdot \sin \omega t$ )

$$\varphi=2: \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \left( \frac{3}{8} t - \frac{1}{4\omega} \sin 2\omega t + \frac{1}{32\omega} \sin \omega t \right) \Big|_0^T \right\} = \frac{3}{8} \quad (74)$$

⋮

$$\begin{aligned} \varphi=n: \quad & \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \left( \frac{2n-1}{2n} \int \sin^{n-2} \omega t dt - \frac{\sin^{2n-1} \omega t \cdot \cos \omega t}{2n\omega} \right) \Big|_0^T \right\} = \\ & = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \times \dots \times \left( \frac{2n-1}{2n} \right) \end{aligned} \quad (75)$$

Die Umformung der rechten Seite von (75) ergibt Gleichung (67).

b) Mehrstufenbeanspruchung

Analog zu Gleichung (53) wird die Gesamtleistung wieder aus Leistungen der Stufen K berechnet:

$$S_{\Delta D_{ges}} = \Delta D_{eff_{ges}}^2 = \frac{1}{h_{ges}} \sum_{K=1}^m h_K \cdot S_{\Delta D_K} \quad (76)$$

Dabei sind

$$S_{\Delta D_{ges}} = \Delta D_{eff_K}^2 \quad (77)$$

und (70) zu berücksichtigen:

$$\Delta D_{eff_{ges}}^2 \cdot u(\rho) = \overline{\Delta D_K^2} \quad (78)$$

(78) repräsentiert wieder Gleichung (66) mit der Bedingung (67).

Für den Fall eines Breitbandprozesses wird hier anstelle  $u(\rho)$  ein Näherungsansatz  $u_B$  verwendet, der eine zusätzliche Abhängigkeit vom Regellosigkeitskoeffizienten  $i$  beinhaltet:

$$u_B(\rho, i) = u(\rho) \cdot \sqrt{\frac{1+i^2}{2}} \quad (79)$$

Die Näherung (79) wurde auf der Grundlage des breitbandigen Gauß'schen Prozesses hergeleitet. Für die Maxima  $\hat{G}$  eines derartigen Beanspruchungs-Prozesses gelten folgende Werte /30//31/:

$$[E\{\hat{X}\}]^2 = \sigma_{eff}^2 \left[ i \cdot \frac{\pi}{2} \right] \quad (80)$$

$$D^2\{\hat{X}\} = \sigma_{eff}^2 \left[ 1 - i^2 \left( \frac{\pi}{2} + 1 \right) \right] \quad (81)$$

Unter Berücksichtigung von

$$E\{\hat{X}^2\} = \hat{\sigma}^2 \quad (82)$$

und des zentralen Momentes 2. Ordnung (9) entsteht daraus:

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma_{eff}^2 \cdot (1 + i^2) \quad (83)$$

bzw. die zu (52) in Bezug auf den Gaußprozeß verallgemeinerte Beziehung

$$\hat{\sigma}^2 = \sqrt{1+i^2} \cdot \sigma_{eff} \quad (84)$$

Davon ausgehend enthält Gleichung (79) folgende Annahmen:

a) Verallgemeinerung des Zusammenhanges (84) auf beliebig andere Verteilungen. Für die Grenzfälle  $i = 1$  und  $i = 0$  ist bereits Gleichung (84) bei jeder Verteilung erfüllt.

b) Übertragung von (84) auf Schädigungsgradienten so, daß im Sonderfall  $i = 1$  die Beziehung (66) wieder erfüllt ist:

$$\overline{\Delta D_K^2} = \frac{\sqrt{1+i^2}}{\sqrt{2}} \cdot u(\rho) \cdot \Delta D_{eff} = u_B(\rho, i) \cdot \Delta D_{eff} \quad (85)$$



Gleichung (79) lässt sich noch umformen zu:

$$u_B(\varphi, i) = \sqrt{\frac{\prod (2l-1 + i^2)}{\prod (2l-1)}} \quad (86)$$

für  $\prod_{l=1}^{\varphi}$  ,  $\varphi$  ganzzahlig.

Der Faktor  $u_B(\varphi, i)$  ist in der Anlage A2 als Diagramm für verschiedene Regellosigkeitskoeffizienten  $i$  und Wählerlinienexponenten  $\varphi$  dargestellt.

### 3.5. Lebensdauer für Schmalbandprozesse

Mit (66) lautet die Lebensdauer (58):

$$N_L = \frac{1}{u(\varphi) \cdot \Delta D_{\text{eff}}} \quad (87)$$

oder in spektraler Darstellung (62):

$$N_L = \frac{1}{u(\varphi) \cdot \sqrt{\int_0^{\infty} \tilde{G}_{\Delta D}(f) df}} \quad (88)$$

Gleichung (88) gestattet die durchgängige spektralanalytische Berechnung beliebiger Schmalbandprozesse endlicher Leistung. In Anlehnung an die gebräuchliche Schreibweise der Palmgren/Miner-Formel (25) für  $N_M$  kann (58) auch als  $k$ -Stufenformel geschrieben werden. Zu diesem Zweck wird der quadratische Mittelwert in seiner Summendarstellung verwendet:

$$\overline{\Delta D_K^2} = \sqrt{\frac{1}{n_{\text{ges}}} \sum_{K=1}^m h_K \cdot \Delta D_K^2} \quad (89)$$

und mit  $h_{\text{ges}} = n_{\text{ges}}$ ,  $h_K = n_K$ ,  $\Delta D_K = \frac{1}{N_K}$  entsteht durch (89) aus (58):

$$N_L = \sqrt{\frac{n_{\text{ges}}}{\sum_{K=1}^m \frac{n_K}{N_K^2}}} \leq N_M \quad (90)$$

### 3.6. Lebensdauer für Breitbandprozesse

Hier sind Spektralleistungen verschiedener Frequenzen gleichzeitig wirksam. Deshalb muß der Bezugsmaßstab "Schwingspielzahl N" durch "Zeit T" ersetzt werden. Beim schmalbandigen Vorgang ist die Gesamtleistung in Form der einseitigen Spektralleistung auf nur einer Frequenz  $f_0$  konzentriert:

$$S_{\Delta D_{ges}} \approx G_{\Delta D}(f_0) - \Delta D_{eff}^2 \quad (91)$$

Einsetzen in (87) liefert

$$N_L = \frac{1}{u(f) \cdot \sqrt{G_{\Delta D}(f_0)}} \quad (92)$$

$N_L$  wird in die "Lebensdauerzeit"  $T_L$  und die Frequenz  $f_0$  zerlegt:

$$N_L = T_L \cdot f_0 \quad (93)$$

Dadurch folgt aus (92):

$$T_L = \frac{1}{u(f) \cdot \sqrt{G_{\Delta D}(f_0) \cdot f_0^2}} \quad (94)$$

Das Produkt unter der Wurzel ist die Spektralleistung der Geschwindigkeit  $\Delta D_V$  der Schädigungsgradientenfunktion:

$$\Delta D_V(t) = \frac{d[\Delta D(t)]}{dt} \quad (95)$$

dividiert durch  $4\pi^2$  (wegen  $S_V(\omega) = \omega^2 \cdot S_x(\omega)$  und  $\omega^2 = 4\pi^2 \cdot f^2$  mit  $v = dx/dt$ ).

Somit läßt sich (94) als Funktion der Geschwindigkeit  $\Delta D_V$  schreiben:

$$T_L = \frac{2\pi}{u(f) \cdot \sqrt{G_{\Delta D_V}(f_0)}} \quad (96)$$

oder durch die Gesamtleistung  $S_{\Delta D_V_{ges}}$  charakterisieren:

$$T_L = \frac{2\pi}{u(f) \cdot \sqrt{S_{\Delta D_V_{ges}}}} \quad (97)$$

Diese Leistung kann auch hier in ihre spektralen Anteile zerlegt werden:

$$T_L = \frac{2\pi}{u(f) \cdot \sqrt{\int_0^\infty \tilde{G}_{\Delta D_V}(f) df}} \quad (98)$$



Unter Berücksichtigung des Zusammenhanges:

$$\tilde{G}_{\Delta D_V}(f) = 4\pi^2 \cdot f^2 \cdot \tilde{G}_{\Delta D}(f) \quad (99)$$

sowie des Überganges von  $u(f)$  zu  $u_B(f, i)$  entsteht aus (98) die Lebensdauerzeit für den beliebigen Breitbandprozeß:

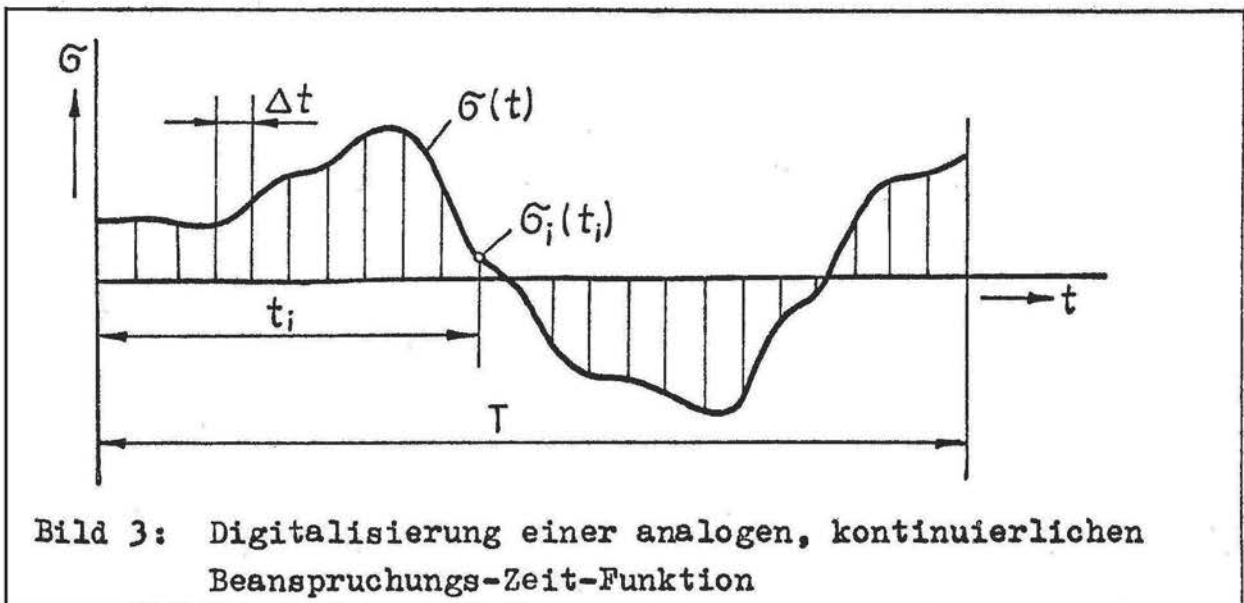
$$T_L = \frac{1}{u_B(f, i) \cdot \sqrt{\int_0^\infty \tilde{G}_{\Delta D}(f) \cdot f^2 df}} \quad (100)$$

Sie beinhaltet als Sonderfall die Gleichung (88).

#### 4. Anwendung diskreter Fouriertransformation auf die Schädigungsgradientenfunktion

##### 4.1. Numerische Form der Lebensdauer Gleichung

Die praktische Berechnung der Lebensdauerzeit  $T_L$  für beliebige Beanspruchungen endlicher Leistung ist nur möglich, wenn von einer digitalisierten Beanspruchungs-Zeit-Funktion ausgegangen wird. Diese Funktion sei aus dem kontinuierlichen analogen Verlauf  $G(t)$  mit Hilfe eines Analog-Digital-Wandlers ermittelt worden, Bild 3.



Das Abtastintervall sei  $\Delta t = \text{const.}$  Dann ist die Abtastdauer

$$T = (n-1) \cdot \Delta t \quad (101)$$

wobei  $n$  die Anzahl der Meßwerte im Zeitbereich  $T$  bedeutet. Die Funktion  $G(t)$  wird durch die Wertefolge  $G_i$  ersetzt:

$$G_i = G(t_i) \quad (102)$$

$$\text{mit } t_i = (i-1) \cdot \Delta t \quad (103)$$

und  $i = 1, 2, \dots, n$  (hier ist  $i$  ein Laufindex!)

Dadurch wird aus Gleichung (60) eine diskrete Schädigungsgradientenfunktion

$$\Delta D_i = \Delta D(t_i) = \frac{1}{K_w} \cdot G_i^p \quad (104)$$

Unter Anwendung der diskreten Fouriertransformation (DFT) entsteht ein diskretes komplexes Amplitudenspektrum:

$$A_{\Delta D_\ell} = A_{\Delta D}(j f_\ell) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta D_i \cdot \exp \left[ -j \frac{2\pi \cdot \ell \cdot i}{n} \right] \quad (105)$$

mit  $\ell = 1, 2, \dots, n$

Durch Quadrieren der Beträge folgt daraus das reelle, zweiseitige Leistungsspektrum:

$$S_{\Delta D_\ell} = |A_{\Delta D_\ell}|^2 \quad (106)$$

bzw. das einseitige Leistungsspektrum

$$G_{\Delta D_\ell} = 2 \cdot |A_{\Delta D_\ell}|^2 \quad (107)$$

Wegen der Symmetrie der Funktion  $S_{\Delta D}(f)$  liefern nur

$$p = \frac{n}{2} + 1 \quad (108)$$

Spektralwerte einer Frequenzseite eigenständige Informationen auf den Frequenzen  $f_1 = 0 \dots f_p$ , deren konstanter Abstand bzw. Bandbreite

$$\Delta f = \frac{1}{(n-1) \cdot \Delta t} \quad (109)$$

beträgt.

Gleichung (100) enthält die auf  $df$  bezogene Spektraldichte  $\tilde{G}_{\Delta D}$ . Im Unterschied dazu ist die diskrete Spektraldichte  $\tilde{G}_{\Delta D_\ell}$  auf das Intervall  $\Delta f$  bezogen. Außerdem geht durch die Digitalisierung der Funktion  $\Delta D(t)$  in der Gleichung (100) das Integral in eine Summe über. Aus der Summation in Verbindung mit  $\Delta f$  folgt deshalb aus (100):

$$T_L = \frac{1}{u_B(f, i) \cdot \sqrt{\sum_{\ell=1}^p G_{\Delta D_\ell}(f_\ell) \cdot f_\ell^2}} \quad (110)$$

Gleichung (110) repräsentiert die numerische Form der Lebensdauerformel (100). Für die Nutzung dieser Gleichung muß vor der Transformation in den Frequenzbereich die Beanspruchungs-Zeit-Funktion in eine Schädigungsgradientenfunktion umgeformt werden, z. B. nach Gleichung (104).

Mit (110) ist eine rationelle Lebensdauerberechnung möglich, wenn als diskrete Fouriertransformation zur Ermittlung der  $p$  Spektralwerte je Block mit  $n$  digitalen Zeitwerten der schnelle Algorithmus /4/ eingesetzt wird. Zur FFT wurden bereits in /38 - 40/ Algoltexte und in /41/ Speicherplatz-Optimierungen angegeben. Inzwischen existieren auch verschiedene Programmsysteme mit FFT für die Belange des Maschinenbaues, z. B. /42 - 46/.

#### 4.2. Voraussetzungen und Folgen der Digitalisierung

Bei der Verarbeitung der diskreten  $\Delta D_i$ -Werte sind die üblichen Besonderheiten der digitalen Signalanalyse gültig. Das betrifft das Shannonsche Abtasttheorem ebenso wie unvermeidbare Abbruchfehler infolge endlicher Zeitabschnitte. Durch die Summierung bis  $p$  in Gleichung (110) liegt eine Frequenz-Bandbegrenzung gegenüber (100) vor:

mit 
$$0 \leq f_x \leq f_p \tag{111}$$

$$f_p = (p - 1) \cdot \Delta f \tag{112}$$

Aus (109) und (108) folgt:

$$f_p = \frac{n}{2(n-1) \cdot \Delta t} \approx \frac{1}{2\Delta t} \tag{113}$$

Die Abtastfrequenz  $f_A = 2 \cdot f_p$  muß mindestens um den Faktor 2 größer sein als die tatsächlich im Prozeß vorkommende höchste Frequenz  $f_{\max}$ . Deshalb ist eine Tiefpaßfilterung mindestens bis  $f_{\max} = f_p$  erforderlich (Erfahrungen /47/ besagen, daß auch noch bei der Abtastung mit  $f_A \approx 2 \cdot f_{\max}$  unbeschränkte Fehler möglich sind).

Bei der diskreten Fouriertransformation kann nur ein endlicher Zeitbereich  $T$  verarbeitet werden. Die Zeitbegrenzung bedeutet Multiplikation der Funktion  $\Delta D_i(t_i)$  in diesem Bereich  $0 \leq t \leq T$  mit einer stetigen Rechteck-Funktion  $g_0(t) = 1$ . Wird die so

"gewichtete" Funktion  $\Delta D_1(t_1)$  fouriertransformiert, dann entspricht der Multiplikation eine Faltungsoperation im Frequenzbereich  $0 \leq f \leq f_p$  mit der Fouriertransformierten  $\tilde{A}g_0(jf)$  der Funktion  $g_0(t)$ :

$$\tilde{A}g_0(jf) = \mathcal{F}\{g_0(t)\} = \int_0^T [1 \cdot \exp(-j2\pi ft)] dt \quad (114)$$

$$\tilde{A}g_0(jf) = T \cdot \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \cdot \exp(-j\pi f T) \quad (115)$$

Das Spektrum zu  $\Delta D_1(t_1)$  wird also durch die Faltung mit einer um die Frequenzachse rotierenden stetigen Spaltfunktion  $\frac{\sin x}{x}$  verfälscht. Eine Verfälschung tritt nur dann nicht ein, wenn die Frequenzen der diskreten Spektralwerte auf den Nulldurchgängen der Spaltfunktion liegen /48/, d.h. wenn die Zeitfunktion bezüglich des Bereiches T periodisch ist. Für jeden anderen Fall wird die Gesamtleistung auf zusätzliche Spektralwerte infolge von Nebenmaxima der Spaltfunktion verteilt. Die Fehler sind reduzierbar, wenn anstelle von  $g_0(t)$  andere Gewichtsfunktionen (Fenster) verwendet werden, deren Fouriertransformierte kleinere Nebenmaxima besitzen. Das sind z. B. Fensterfunktionen nach Bartlett, Hanning, Hamming, Eberhard /49/, Papoulis, Blackman, Tukey und Kaiser /50/ sowie das Cosinus- und das Gauß-Fenster /51/. Dabei ist zu beachten, daß kleinere Nebenmaxima zumeist von einem gegenüber dem Rechteckfenster breiteren Hauptmaximum begleitet werden.

#### 4.3. Das Programm SLEBE

Zur Berechnung der Lebensdauer  $T_L$  nach Gleichung (100) wurde das dialogorientierte Fortran-Programm SLEBE geschrieben. Dabei konnten Teile bereits vorhandener Programme zur digitalen Signalprozeßanalyse /46/ genutzt werden, die entsprechende Unterprogramme zum FFT-Algorithmus /53/ enthalten.

SLEBE wurde in zwei Versionen realisiert /52/. Während mit SLEBE 1 die Gradientenfunktion und das Leistungsspektrum auf dem Bildschirm und dem xy-Schreiber grafisch darstellbar ist, wurde in SLEBE 2 auf jede Grafik verzichtet, um den Dialog minimal zu halten, Anlage A3. SLEBE 2 beinhaltet nur die für die Berechnung notwendigen Routinen, siehe Anlage A4.

In SLEBE 1 wird bei der Lebensdauerberechnung noch mit einem konstanten Faktor  $u_B = \sqrt{2}$  gearbeitet. Das gilt nur streng für Prozesse mit einem Regellosigkeitskoeffizienten  $i = 0,6 \dots 0,7$  und Wöhlerlinienexponenten  $\rho = 3 \dots 6$ , siehe Anlage A2. In SLEBE 2 wird der Faktor  $u_B$  in Abhängigkeit von  $i$  und  $\rho$  berechnet. Deshalb enthält dieses Programm zusätzliche Routinen zur Berechnung des Regellosigkeitskoeffizienten für die konkrete Beanspruchungsfolge  $\tilde{\sigma}_1(t_1)$  sowie zur Ermittlung des Faktors  $u_B(\rho, i)$ , Anlage A4. Bei  $u_B(\rho, i)$  tritt die Schwierigkeit auf, daß Gleichung (86) nur für ganzzahlige  $\rho$  Gültigkeit besitzt. Es werden deshalb im Unterprogramm über (86) drei Werte  $u_{BK}$  für drei ganzzahlige  $\rho_K$  ermittelt, die zu dem tatsächlichen  $\rho$  benachbart sind. Mit Hilfe einer parabolischen Interpolation erfolgt dann die Berechnung des Faktors  $u_B$  für das vorgesehene  $\rho$ .

Voraussetzung für die Anwendung der SLEBE-Programme ist die vorherige Abspeicherung der digitalisierten Beanspruchungs-Zeit-Funktion auf einem File der Magnetplatte. Mit SLEBE wird diese diskrete Funktion unter Berücksichtigung der Maximalspannung, einer Wöhlerlinie nach (28) und der Dauerfestigkeit  $\tilde{\sigma}_D$  in die entsprechende Schädigungsgradientenfunktion umgeformt. Diese neuen Werte werden dann auf einem zweiten File der Magnetplatte zur weiteren Bearbeitung abgelegt, Anlage A3.

Dabei erfolgt ein Zusammenrücken der transienten Anteile der Funktion  $\Delta D(t)$ . Erst diese "gefilterte" Funktion wird fouriertransformiert. Durch die Eliminierung der Nullanteile sind zusätzliche Abbruchfehler vermeidbar, und es kann außerdem Rechenzeit für die Fouriertransformation eingespart werden.

Das Zusammenrücken der transienten Anteile täuscht jedoch eine zu hohe Frequenz  $f_T$  der Schädigungsgradientenfunktion vor. Diese Frequenz ist um einen "Transientenfaktor  $t_F$ " gegenüber der tatsächlich wirkenden Frequenz  $f$  zu groß:

$$f = t_F \cdot f_T \quad (116)$$

$$\text{mit } 0 \leq t_F \leq 1$$

Der Faktor  $t_F$  ist aus dem Verhältnis der Zeitdauer  $T$  zur Dauer des transienten Signales  $T_t$ , Bild 4, berechenbar:

$$t_F = \frac{T_t}{T} \quad (117)$$

$$\text{mit } T = 1/f \text{ und } T_t = 1/f_T.$$



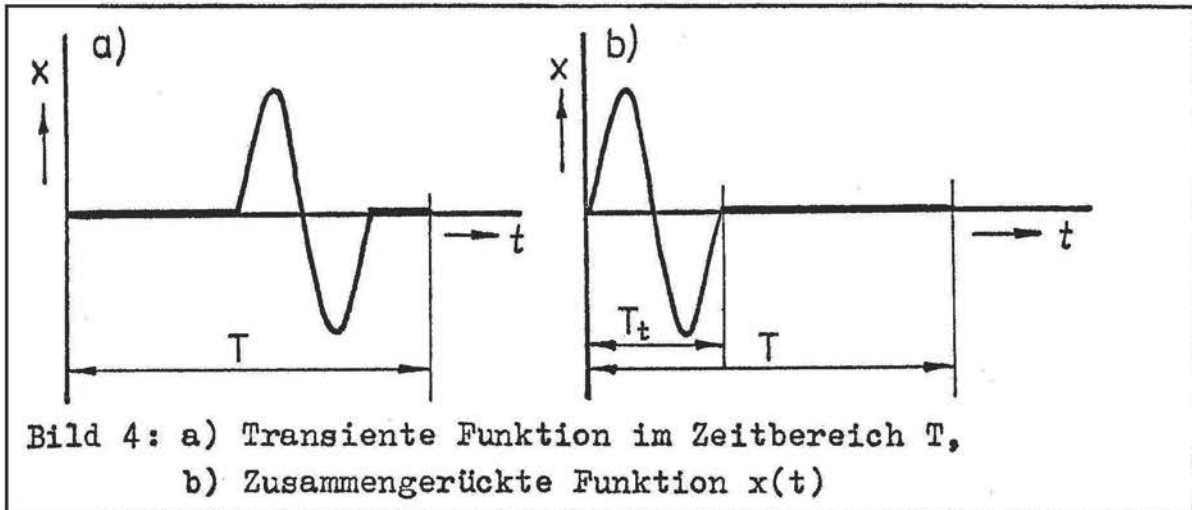


Bild 4: a) Transiente Funktion im Zeitbereich T,  
b) Zusammengerückte Funktion x(t)

Nach dem Zusammenrücken der Funktion  $\Delta D(t)$  sind die damit berechneten diskreten Frequenzen  $f_1$  nach Gleichung (110) einheitlich um den Faktor  $1/t_F$  zu groß, d. h. sie müssen mit  $t_F$  multipliziert werden, um die tatsächlich wirkenden Frequenzen zu erhalten.

Aus Gleichung (110) entsteht somit folgende Programm-Modifikation:

$$T_L = \frac{1}{U_B \cdot t_F \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^P G_{\Delta D_k}(f_k) \cdot f_k^2}} \quad (118)$$

In SLEBE werden die auf der Magnetplatte hintereinander liegenden Zeit-Blöcke der maximalen Blocklänge

$$n = 2048$$

fouriertransformiert und die Spektralleistungen dieser Blöcke für jede Frequenz  $f_1$  arithmetisch gemittelt. Damit können längere Zeitabschnitte (im Sinne der Ergodizität, Abschnitt 2.1) einer Realisierung mit optimaler Speicherplatz-Ausnutzung analysiert werden.

Weiterhin ist in SLEBE die Multiplikation der zu verarbeitenden Funktion  $\Delta D(t)$  blockweise mit Gewichtsfunktionen im Zeitbereich möglich. Es handelt sich um folgende einfache Fensterfunktionen /49/:

Rechteck-Fenster  $g_1(t)$

Nur der 1. und letzte Wert jedes Zeitblockes wird zu Null gesetzt.

Bartlett-Fenster  $g_2(t)$

$$g_2(t) = \begin{cases} 2(t/T) & \text{für } 0 \leq t \leq T/2 \\ 2(1 - t/T) & \text{für } T/2 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (119)$$

Das bedeutet Faltung im Frequenzbereich mit der komplexen Fouriertransformierten:

$$\tilde{A}_{g_2}(jf) = \frac{T}{2} \cdot \left( \frac{\sin \pi f T / 2}{\pi f T / 2} \right)^2 \cdot \exp[-j\pi f T] \quad (120)$$

Hanning-Fenster:

$$g_3(t) = \begin{cases} 0,5 + 0,5 \cdot \cos 2\pi(t/T - 0,5) & \text{für } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (121)$$

$$\Rightarrow \tilde{A}_{g_3}(jf) = 0,5 \tilde{A}_{g_0}(jf) + 0,25 \left\{ \tilde{A}_{g_0}[j(f-1/T)] + \tilde{A}_{g_0}[j(f+1/T)] \right\} \quad (122)$$

mit  $\tilde{A}_{g_0}(jf)$  nach Gleichung (115)

Hamming-Fenster (optimales Cosinus-Fenster):

$$g_4(t) = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos 2\pi(t/T - 0,5) & \text{für } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (123)$$

$$\Rightarrow \tilde{A}_{g_4}(jf) = 0,54 \tilde{A}_{g_0}(jf) + 0,23 \left\{ \tilde{A}_{g_0}[j(f-1/T)] + \tilde{A}_{g_0}[j(f+1/T)] \right\} \quad (124)$$

Die Multiplikation mit den Gewichtsfunktionen  $g_i(t)$  im Zeitbereich führt insgesamt auf zu kleine Spektralwerte, deshalb sind im Programm Vergrößerungsfaktoren für die Spektralleistungen  $k_0 = 1$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 4$ ,  $k_3 = 4$  und  $k_4 = 3.43 / 51 /$  berücksichtigt. Diese Faktoren ergeben sich aus dem Verhältnis der Fouriertransformierten  $\tilde{A}_{g_i}$  bei  $f = 0$ :

$$k_i = \left( \frac{\tilde{A}_{g_0}(0)}{\tilde{A}_{g_i}(0)} \right)^2 \quad (125)$$

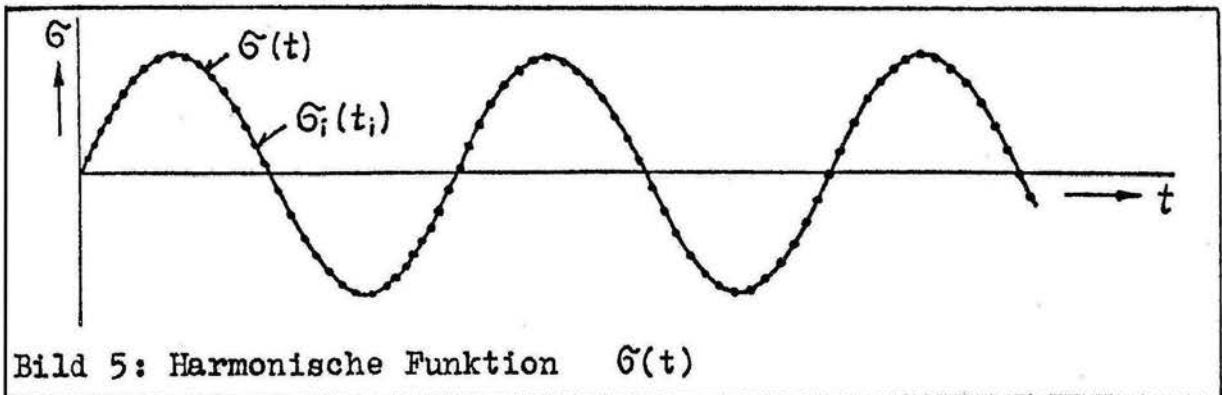
d. h. aus dem Verhältnis der Flächeninhalte, die durch die Gewichtsfunktionen  $g_i(t)$  im Bereich  $0 \leq t \leq T$  eingeschlossen werden.

#### 4.4. Beispiele zu deterministischen Funktionen

##### 4.4.1. Harmonische Beanspruchung

Wenn die Gleichungen (110) bzw. (118) verteilungsfrei sind, muß damit auch die Lebensdauer einer einfachen Sinusfunktion  $\sigma(t)$  über ihre Momentanwerte  $\sigma_i(t_i)$  berechenbar sein:

Beispiel 1 Es sei  $\sigma(t) = \sigma_1 \cdot \sin 2\pi f_0 t$   
mit  $\sigma_1 = 180 \text{ MPa}$ ,  $f_0 = 20 \text{ Hz}$ , siehe Bild 5.



Es soll folgende Wöhlerlinie gelten:

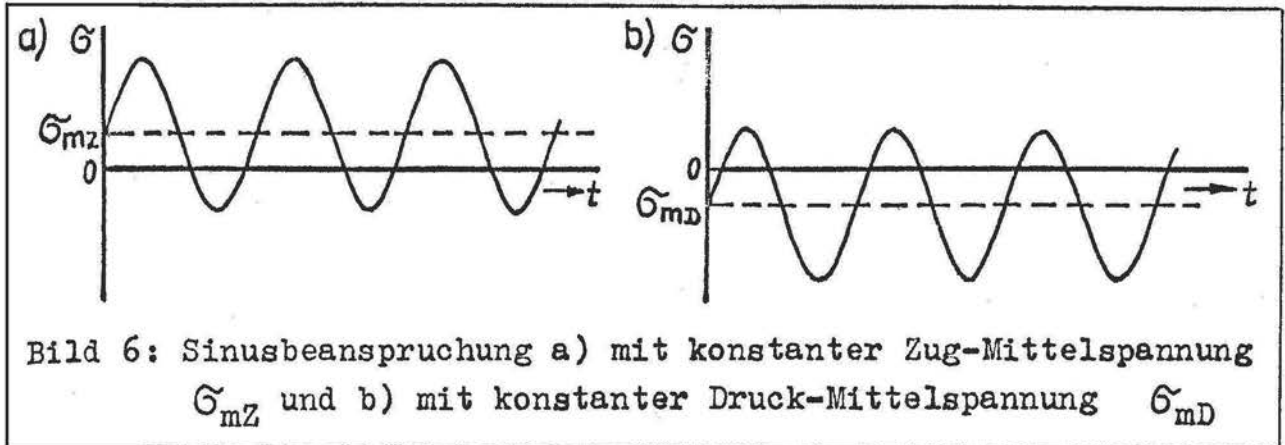
$$N(\sigma) = 1,27 \cdot 10^{17} \cdot \sigma^{-5,42} \quad (126)$$

Daraus folgt die zugehörige experimentelle Lebensdauer  $N_E(\sigma_1) = 75897$  bzw. für die Frequenz  $f_0$  die Lebensdauerzeit  $T_E = 3794,85 \text{ s}$ . Die Funktion  $\sigma(t)$  wurde mit einem speziellen Programm /54/ digital als Wertefolge  $\sigma_i(t_i)$  zu 50 Werten je Schwingung erzeugt und auf der Magnetplatte abgelegt.

In Anlage A 5 sind die Ergebnisse der Berechnung mit SLEBE für 5000 Momentanwerte enthalten. Jedes Beispiel wurde mit den 4 Fensterfunktionen  $g_1(t)$  bis  $g_4(t)$  nach Abschnitt 4.3 berechnet. Die beste Übereinstimmung im Beispiel 1 zur vorgegebenen Lebensdauer  $T_E$  liefert das Hanning-Fenster mit dem Faktor  $T_E/T_L = 1,03$  und das Hamming-Fenster mit 0,98.

Beispiel 1a Es soll die theoretische Lebensdauer für je eine Sinusschwingung mit Zug- und Druck-Mittelspannung untersucht werden, Bild 6





Zahlenwerte:  $\sigma_a = 180 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{mZ} = 60 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{mD} = -60 \text{ MPa}$ ,  
 $f_0 = 20 \text{ Hz}$ .

Unter Einbeziehung der Wöhlerlinie (126) lauten dazu die SLEBE-Ergebnisse (Hamming-Fenster):

$$T_{LZ} = 812,39 \text{ s} \quad \text{und} \quad T_{LD} = 34817,6 \text{ s}$$

oder in Schwingspielzahlen

$$N_{LZ} = 1625 \quad \text{und} \quad N_{LD} = 6961352.$$

Für eine Mittelspannung  $\sigma_m = 0$  ergab die Wöhlerlinie den Wert  $N_E = 75897$ , siehe oben. Unter Berücksichtigung von (45) folgt daraus eine sehr große Mittelspannungsempfindlichkeit  $\psi = 1,52$ . Für reale Werte gilt  $\psi \approx 0,3$  /55/, d. h. durch die pauschale Verarbeitung der in Bild 6 dargestellten Beanspruchungsverläufe mit dem Programm SLEBE wird der Einfluß der Mittelspannung erheblich überschätzt.

Es wird deshalb für alle SLEBE-Anwendungen folgender Verfahrensweg vorgeschlagen:

1. Erwartungswert  $\mu_\sigma$  (konstante Mittelspannung) der Beanspruchungs-Zeit-Funktion berechnen
2. Zentrierung der Funktion  $\sigma(t)$  auf den Erwartungswert
3. Für die Berechnung der Schädigungsgradienten Verwendung der Wöhlerlinie mit dieser konstanten Mittelspannung  $\sigma_m = \mu_\sigma$ .

Daraus ergeben sich für die Eingabe des Beispiels 1a in SLEBE die Änderungen:

$$\text{Zug: } \sigma_{\max} = 180 \text{ MPa (vorher 240 MPa)}, N(\sigma) = 7,1745 \cdot 10^{16} \cdot \sigma^{-5,42}$$

$$\text{Druck: } \sigma_{\max} = 180 \text{ MPa (vorher 120 MPa)}, N(\sigma) = 2,129 \cdot 10^{17} \cdot \sigma^{-5,42},$$

jeweils  $N(\sigma)$  berechnet für  $\psi = 0,3$ .

Mit diesen neuen Werten ergab SLEBE (Hamming-Fenster):

$$N_{LZ} = 43563 \quad \text{und} \quad N_{LD} = 129261$$

unter Berücksichtigung der Frequenz  $f_0$ .

#### 4.4.2. Blockprogramme

In Anlage A5 sind dazu 3 Modellbeispiele Nr. 2 bis 4 enthalten. Es handelt sich um Blockprogramme konstanter Frequenz, ohne Mittelspannungsschwankungen. Für derartige Fälle stellt Gleichung (90) die exakte Lösung für das Programm SLEBE dar. Der Vergleich der SLEBE-Ergebnisse mit diesen Lösungen zeigt wieder für das Hanning-Fenster (121) die beste Übereinstimmung.

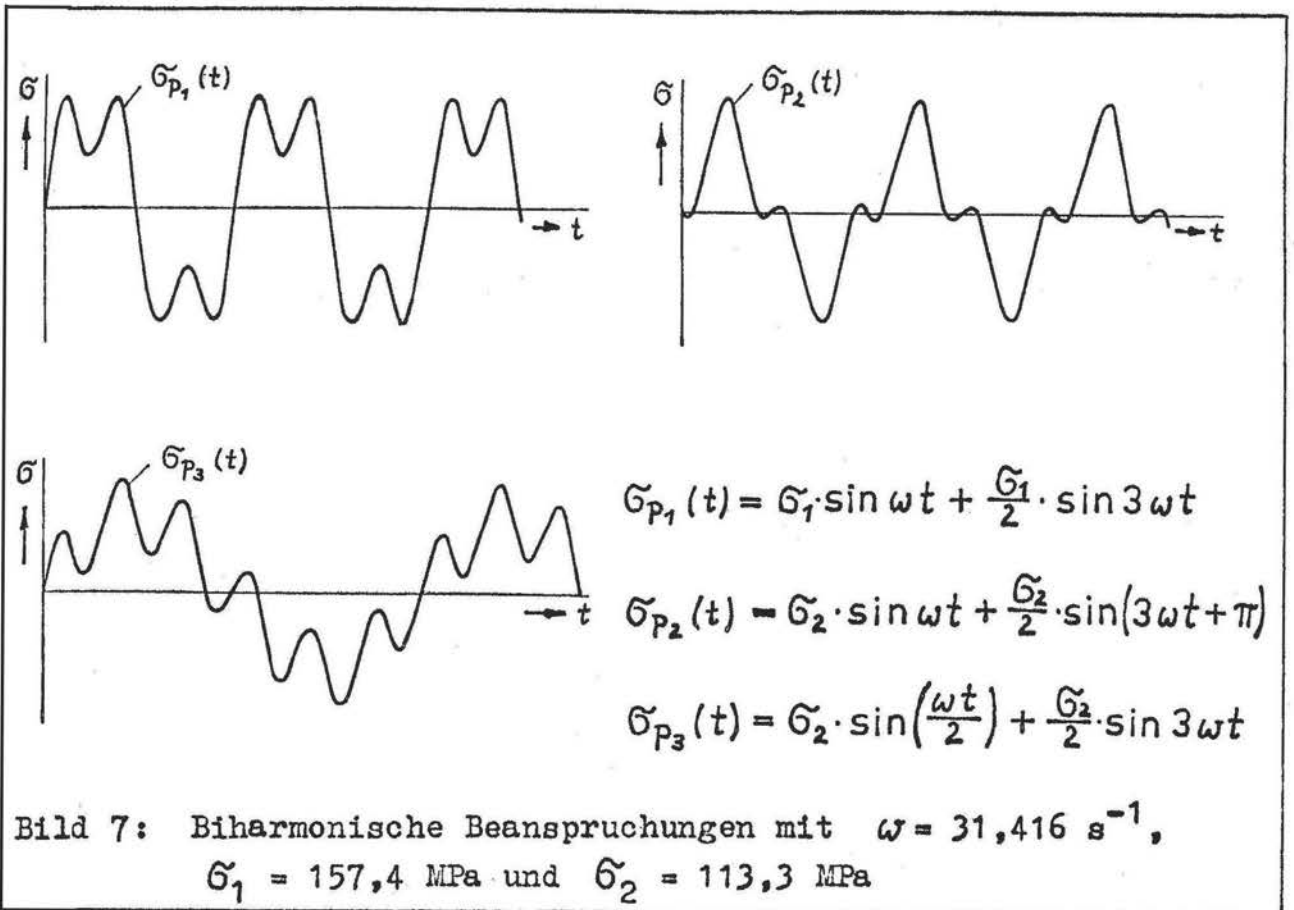
Die Beanspruchungsverläufe 2 bis 4 wurden als Extremwertefolge mit Hilfe des Programmes PEXTF /56/ erzeugt und durch das Programm EMOA /57/ mit Momentanwerten so aufgefüllt, daß zwischen je zwei Extremwerten ein Sinus-Halbschwingspiel digital vorhanden war.

#### 4.4.3. Periodische Beanspruchung

a) Im Rahmen eigener Ermüdungsfestigkeits-Experimente wurde die Wirkung biharmonischer Beanspruchungs-Zeit-Verläufe an gekerbten Rundproben unter Zug-Druck-Belastung experimentell untersucht und entsprechenden Ergebnissen mit dem Programm SLEBE gegenübergestellt.

Die gleichen Rundproben verwendete D. Lange /58//59/ für seine Versuchsdurchführung. Für 50 % Bruchwahrscheinlichkeit ermittelte er die Wöhlerliniengleichung (126).

Als Prüfmaschine diente eine prozeßrechnergesteuerte Hydro-pulsanlage (Hersteller: Schenck-AG, BRD 1976) der Sektion Grundlagen des Maschinenwesens der TU Dresden. Die Prüfung erfolgte kraftgesteuert auf einem 16 kN-Prüfzylinder. In Anlehnung an ein Beispiel in /60/ kamen drei biharmonische Beanspruchungsverläufe  $\sigma_{pj}(t)$  mit einem einheitlichen Maximalhorizont  $\hat{\sigma}_{\max} = 170$  MPa (Nennspannung im Nettoquerschnitt) zur Anwendung, Bild 7.



Es handelt sich hier um die Beispiele 5, 6 und 7 in Anlage A6. Die Eigenkreisfrequenz  $\omega = 31,416 \text{ s}^{-1}$  bedeutet, daß für die Oberschwingungen einheitlich die Frequenz

$$f_2 = \frac{3\omega}{2\pi} = 15 \text{ Hz}$$

verwendet wurde.

Mit Hilfe spezieller Prozeßrechnerbefehle zur Ansteuerung einzelner Extremwerte [61], wurden die Verläufe  $\sigma_{Pj}(t)$  auf der Hydropulsanlage realisiert. Die damit ermittelten Bruchschwingungszahlen für 50 % Bruchwahrscheinlichkeit für je 7 bis 8 Einzelproben wurden in die experimentelle Lebensdauerzeit  $T_E$  umgerechnet, Anlage A6.

Parallel zu den Versuchen erfolgte mit dem Programm SINUSK /54/ die Erzeugung von je 5000 Momentanwerten der entsprechenden digitalisierten Verläufe auf der Magnetplatte zur Eingabe in SLEBE. Die so hergestellten "mathematischen Sollwerte" stimmen sehr gut mit gemessenen Istwertverläufen überein. In Anlage A7 sind für die Beispiele 5 und 7 Soll- und Istwerte gemeinsam dargestellt. Jeweils darunter befinden sich die originalen und gefilterten Schädigungsgradientenfunktionen  $\Delta D(t)$  der Sollwerte und daneben die daraus ermittelten Leistungsspektren  $\overline{G_{\Delta D}(f)} = G_{\Delta D}(f) / G_{\Delta D_{\max}}$ .

Die Ergebnisse mit SLEBE in Relation zu den experimentellen Werten  $T_E$  zeigt Anlage A6. Dabei sind hier und in den folgenden Beispielen die Schadenssummen  $Q$  angegeben:

$$Q = \frac{T_E}{T_L} \quad (127)$$

d. h. es werden die experimentellen Werte auf die mit SLEBE ermittelten Werte  $T_L$  bezogen.  $Q > 1$  bedeutet, daß die Berechnung eine kürzere Lebensdauer gegenüber dem Experiment lieferte.

b) F. Lange /62/ führte Versuche durch, bei denen die Erzeugung der Beanspruchungs-Zeitverläufe durch Überlagerung von Rechteck-Impulsen verschiedener Länge  $T_R$  mit einer harmonischen Funktion erfolgte, Bild 8.

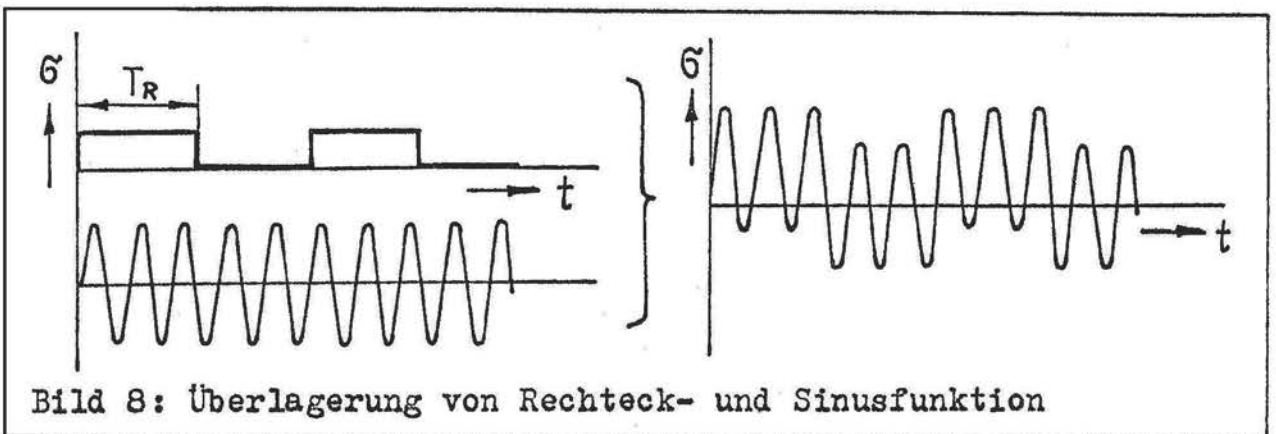


Bild 8: Überlagerung von Rechteck- und Sinusfunktion

Für diese Versuche wurden mit SLEBE drei Beispiele gerechnet. Das Ergebnis ist in Anlage A 8 enthalten.

Vor der Eingabe in SLEBE wurden gemäß Abschnitt 4.4.1. die digitalisierten Beanspruchungs-Verläufe auf den Erwartungswert zentriert und die Wöhlerlinie mit der von Null abweichenden Mittelspannung verwendet. Die geänderte Konstante  $K_W$  ergab sich aus der Berücksichtigung einer konstanten Mittelspannungsempfindlichkeit  $\psi = 0,216$  für große Blocklängen bzw.  $T_R$ . Die in der Anlage A8 abgebildeten Verläufe wurden wieder durch PEXTF /56/ in Kombination mit EMOA /57/ digital erzeugt.

c) Wirthgen /63/ realisierte ein umfassendes Versuchsprogramm zum Einfluß variabler Mittelspannungen, in dem er die Überlagerung jeweils zweier Sinusschwingungen verschiedener Frequenzen variierte. Eine dieser Beanspruchungs-Zeit-Funktionen ist im Bild 9 dargestellt.

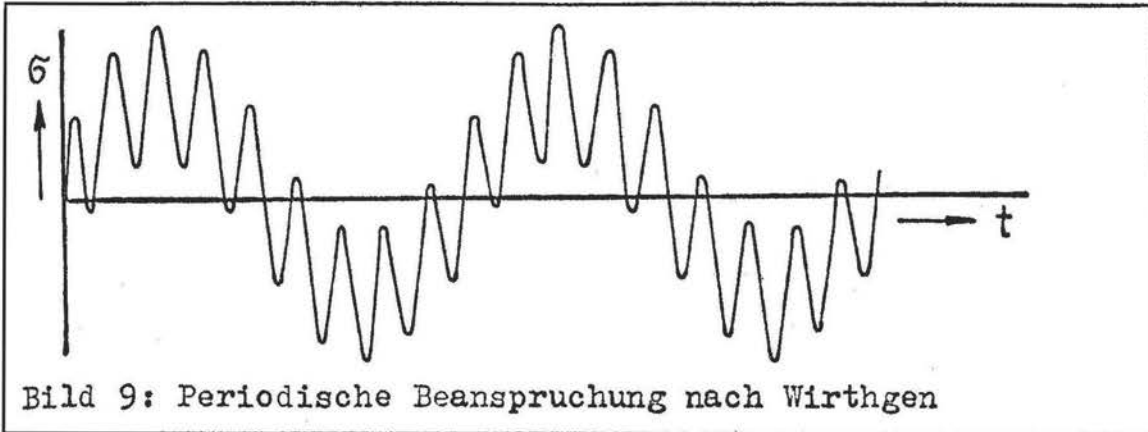


Bild 9: Periodische Beanspruchung nach Wirthgen

14 der insgesamt 41 biharmonischen Funktionen wurden mit dem Programm SINUSK /54/ digital rekonstruiert und mit SLEBE ausgewertet. Die Ergebnisse sind in Anlage A9 bis A12 enthalten. Die Wöhlerlinie wurde aus den Werten für  $f = 35$  Hz, siehe Tabelle S. 33 in /63/,  $\sigma_1 = 24$  kp/mm<sup>2</sup> und  $\sigma_2 = 14$  kp/mm<sup>2</sup> bestimmt. Daraus entsteht die Gleichung

$$N(\sigma) = 8,216 \cdot 10^{17} \cdot \sigma^{-5,61}$$

für  $\sigma$  in MPa.

Die Bruch-Schwingspielzahlen der periodischen Beanspruchungen wurden dem zugehörigen Versuchsbericht /64/ entnommen und über die jeweils höhere Frequenz in die experimentelle Lebensdauerzeit  $T_E$  umgerechnet.

#### 4.5. Beispiele zu stochastischen Funktionen

##### 4.5.1. Schmalbandprozesse

a) In /65/ wurden Ermüdungsfestigkeitsversuche an gekerbten Rund- und Flachproben für Pseudo-Randomversuche (Regellosigkeitskoeffizient  $i = 1$ ) vorgestellt. Da es sich um Beanspruchungen konstanter Frequenz ohne Mittelspannung handelt, kann Gleichung (90) zur Berechnung von  $N_L$  angewendet werden. Zu diesem Zweck wurden aus /65/, Anlage A49, die Kollektivwerte des 8-Stufen-Programms entnommen und die Lebensdauerberechnung durchgeführt. Es liegen für 4 Probenformen Ergebnisse zu je zwei Spannungshorizonten vor. Die Schadenssummen  $N_E/N_L$  sind in Anlage A13 enthalten.

Auf die Berechnung mit SLEBE wurde hier verzichtet, weil einerseits die Rekonstruktion der regellosen Verläufe einen größeren Aufwand bedeutet und andererseits  $N_L$  in diesem Fall die exakte Lösung für SLEBE wie im Abschnitt 4.4.2. repräsentiert.



- b) Von Wirthgen /63/ wurden auch Untersuchungen an gekerbten Flachproben mit regelloser Beanspruchung (Regellosigkeitskoeffizient  $i = 0,93$  und Korrelationskoeffizient  $r = 0,5$ ) durchgeführt. Interpretiert man die verwendete Funktion  $\tilde{G}(t)$  im Sinne des Abschnittes 4.3.2. näherungsweise als Beanspruchungsfolge konstanter Frequenz ohne Mittelspannung, so kann wieder Gleichung (90) zur Ermittlung der Lebensdauer  $N_L$  benutzt werden.

Die Ergebnisse der Berechnung sowie eine Darstellung der Funktion  $\tilde{G}(t)$  und der Amplituden  $\tilde{G}_j$  in Abhängigkeit vom Logarithmus der absoluten Summenhäufigkeiten  $H_j$  (Amplitudenkollektiv  $\tilde{G}_j (\ln H_j)$ ) zeigt Anlage A13.

- c) Luber /66/ führte neben zahlreichen anderen Untersuchungen Ermüdungsfestigkeitsversuche mit  $i = 1$  an ungekerbten Rundproben durch. Ergebnisse der Berechnung mit Gleichung (90) sowie die Darstellung der Zeitfunktion und des Geradlinienkollektives befinden sich in Anlage A12.

#### 4.5.2. Breitbandprozesse

Zur Nachrechnung experimenteller Werte mit SLEBE 1 wurden Beanspruchungs-Zeit-Verläufe analysiert, für die D.Lange /58/ Untersuchungen an gekerbten Rundproben aus St 38 durchgeführt hatte. Es handelt sich dabei um Gauß'sche Prozesse mit variierten Regellosigkeitskoeffizienten.

Die Sollwertverläufe der regellosen Beanspruchungen hat Lange mit dem Programm GAUS 20 /67/ erzeugt, das auf der Grundlage der Näherungsgleichung (18) arbeitet. Die so ermittelten Extremwerte wurden dann mit konstanter Frequenz (Pseudo-Zufallsprozeß) vom Prozeßrechner dem Hydropuls-Zylinder vorgegeben.

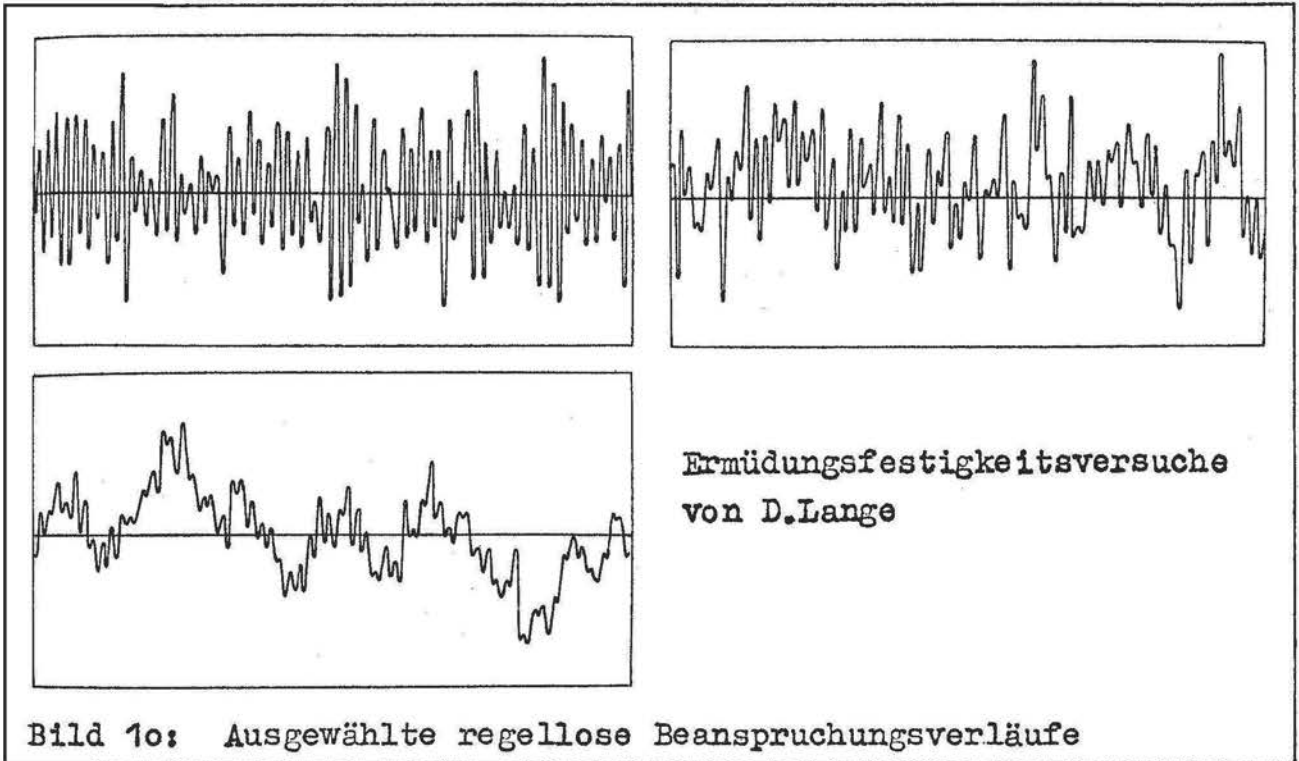
Für die Eingabe in SLEBE wurden drei der von Lange verwendeten regellosen Beanspruchungsverläufe ausgewählt und noch einmal mit dem Programm GAUS 20 erzeugt und die Extremwertfolgen auf der Magnetplatte abgelegt.

Ausschnitte dieser Verläufe für  $i = 0,95$ ,  $i = 0,7$  und  $i = 0,3$  sind in Bild 10 dargestellt.

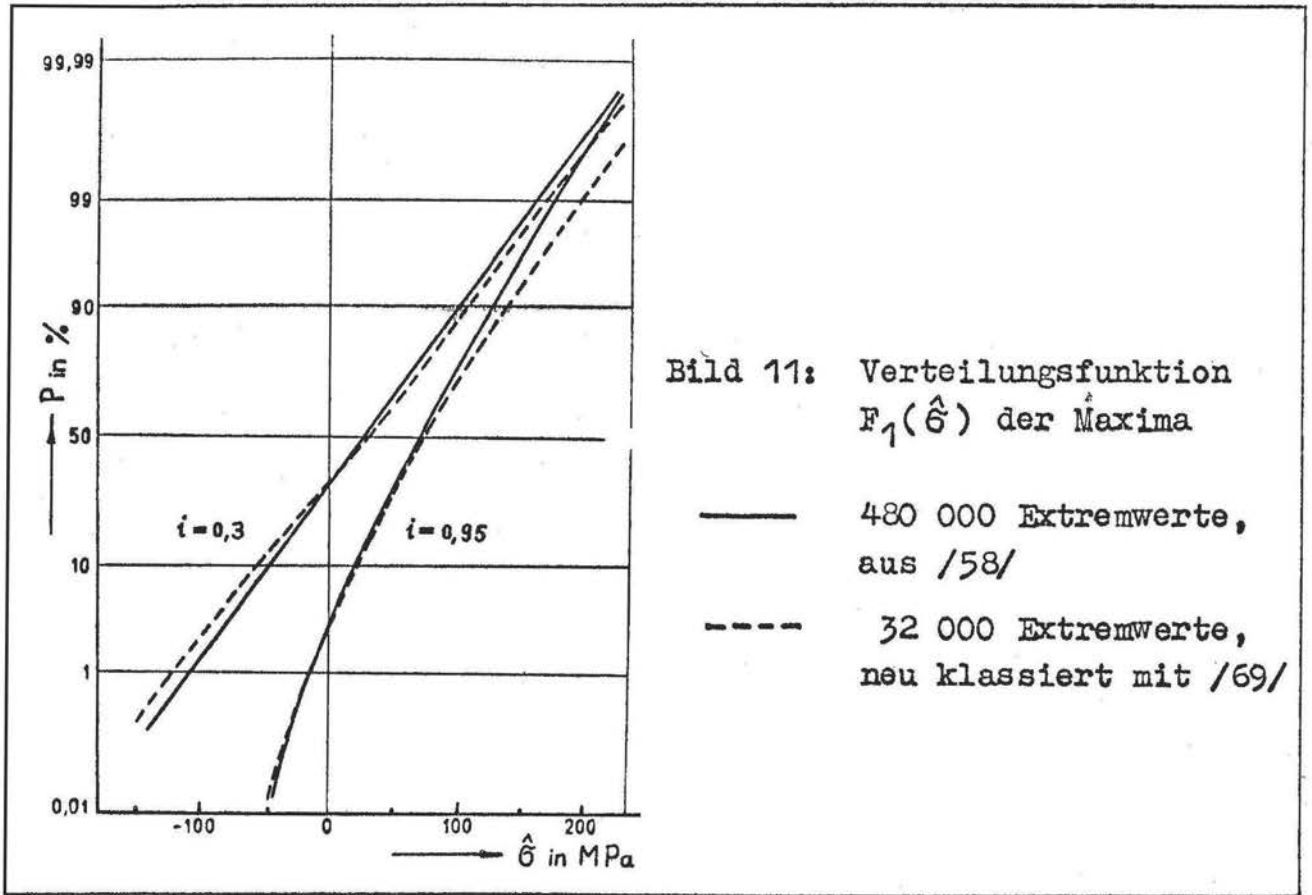


Für die drei Verläufe gilt einheitlich:

- Crestfaktor  $C = \hat{\sigma}_{\max} / \sigma_{\text{eff}} = 3,7$
- Sequenzlänge  $N_S = 240\ 000$  Schwingspiele
- konstante Frequenz je Schwingspiel  $f_0 = 15$  Hz
- Wöhlerlinie (126) für 50 % Bruchwahrscheinlichkeit



Die Nachrechnung mit SLEBE wurde durch den Umstand erschwert, daß nur ein Teil der Sequenzlänge von 480 000 Extremwerten auf der Magnetplatte abgelegt werden konnte. Es können nur maximal jeweils 32 767 Werte auf die Platte übertragen werden /68/. Durch Klassierung der Maxima und Minima mußte deshalb zunächst getestet werden, wie weit durch die wesentlich verringerte Anzahl der abgespeicherten Extremwerte bereits die Rice-Verteilung der vollständigen Sequenzlänge gewährleistet ist. Ergebnisse einer Klassierung mit /69/ zeigt Bild 11 in Form relativer Summenhäufigkeiten der Maxima für  $i = 0,3$  und  $i = 0,95$ .



Zur quantitativen Abschätzung der Wirkung von Abweichungen zwischen den Verteilungsfunktionen für 480 000 und 32 000 Extremwerten auf die Lebensdauer wurde jeweils die Häufigkeitsdichte der regulären Maxima abgeleitet und eine lineare Schadensberechnung nach Corten/Dolan durchgeführt. Es ergab sich aus dieser Näherung folgende Verkürzung  $V_L$  der Lebensdauer für die geringere Extremwertanzahl gegenüber der vollständigen Sequenzlänge:

$$V_L(i = 0,95) = 56 \%, \quad V_L(i = 0,7) = 46 \%, \quad V_L(i = 0,3) = 71 \%$$

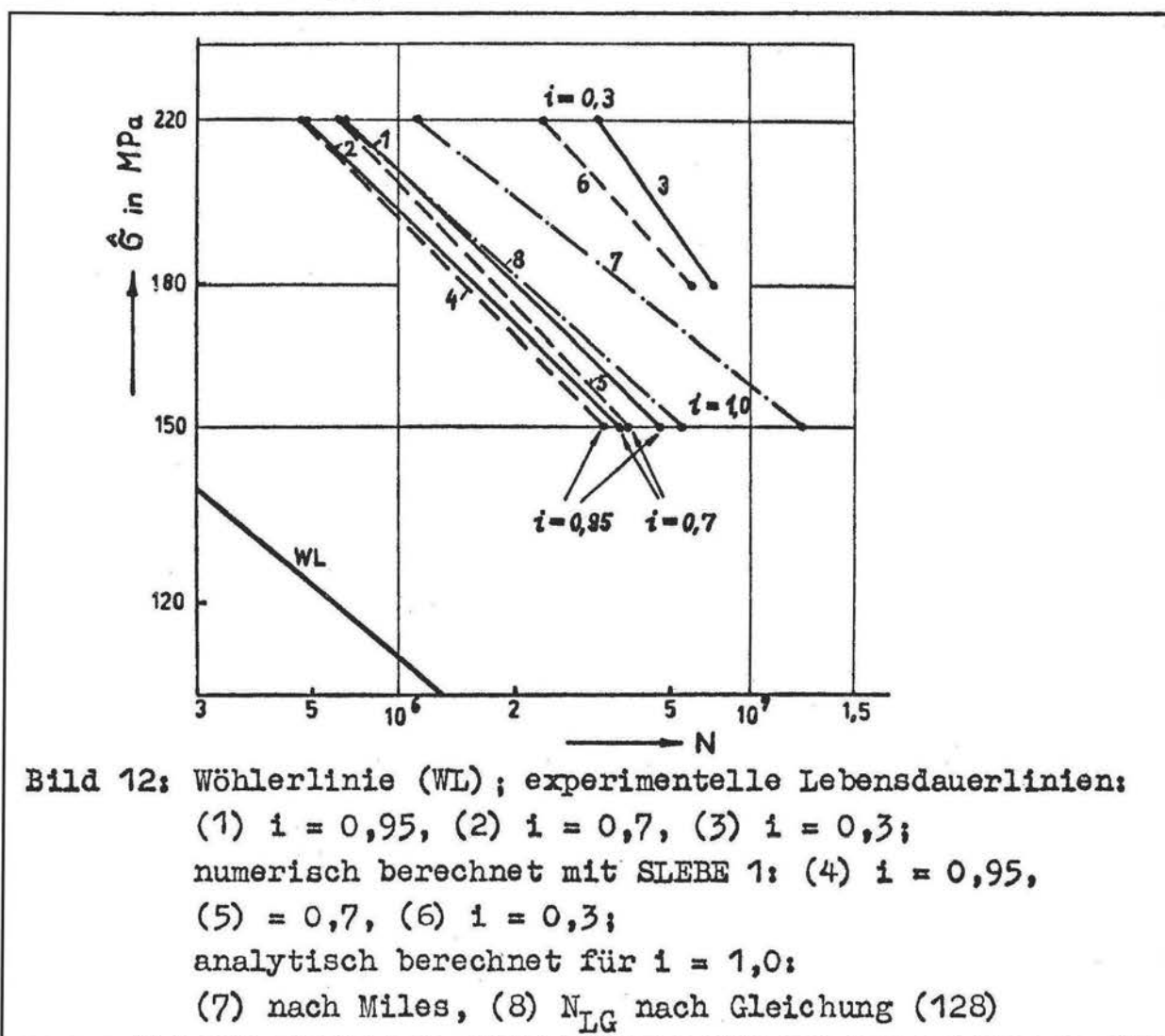
Das ist im Mittel 60 %. Die auf der Basis der geringeren Extremwertanzahl ermittelten Lebensdauerwerte sind also um den Faktor 0,6 zu klein. Deshalb müssen sie durch 0,6 dividiert werden, wenn ein Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen realistisch sein soll.

Durch das Programm EMOA /57/ wurden jedem abgespeicherten Extremwert 5 Momentanwerte so zugeordnet, daß sinusförmige Halbschwingspiele entstanden. Diese um den Faktor 5 größere Anzahl von Momentanwerten wurde ebenfalls auf dem Magnetplattenspeicher abgelegt.

Außerdem kamen nur 20 000 Extremwerte, d. h. 100 000 Momentanwerte, zur Anwendung. Die Verteilungsfunktionen der 32 000 und der 20 000 Extremwerte waren nahezu gleich, so daß auch hier der Faktor 0,6 beibehalten werden konnte.

In Anlage A14 sind die Ergebnisse der Berechnung mit SLEBE enthalten. Erst nach Division durch 0,6 wurden die Schadenssummen  $Q$  ermittelt.

Bild 12 zeigt die von D.Lange ermittelten Versuchswerte im Vergleich zu den mit SLEBE berechneten Ergebnissen, umgerechnet auf Bruch-Schwingspielzahlen  $N$ .



In Bild 12 sind zusätzlich zwei analytisch berechnete Lebensdauerlinien (7) und (8) für die theoretische Regellosigkeit  $i = 1,0$  eingetragen. Dabei stellt Linie (7) das Ergebnis nach Miles (23) dar.

Der Linie (8) liegt eine analytische Formulierung der vertei-

lungsfreien Lebensdauer  $N_L$  (90) speziell für schmalbandige Gaußprozesse zugrunde.

Analog zu Miles wurden die Summen in Gleichung (90) durch Integrale über die rayleighverteilte Häufigkeitsdichte der Maxima ersetzt und wieder die Gammafunktion (30) zur rationellen Beschreibung dieser Integrale verwendet. Dann entsteht aus  $N_L$  die Lebensdauer  $N_{LG}$  für den Sonderfall des schmalbandigen Gaußprozesses:

$$N_{Lg} = \frac{K_w}{\sqrt{\Gamma(\rho+1)} \cdot 2^{\frac{\rho}{2}} \cdot G_{eff}^{\rho}} \leq N_{Mi} \quad (128)$$

Wie bei Gleichung (23) ist auch hier durch die Vorgabe des Spannungshorizontes über den Crestfaktor der Effektivwert gegeben und mit den Wöhlerlinienkonstanten  $K_w$  und  $\rho$  die Lebensdauer  $N_{LG}$  einfach berechenbar.

#### 4.6. Schadenssummen der Beispiele

Sofern experimentelle Werte vorlagen, wurden die Schadenssummen der vorgestellten Beispiele statistisch ausgewertet, um einen Überblick zur Anwendbarkeit des quadratischen Mittelwertes (58) zu erhalten. (Es sei darauf hingewiesen, daß dieser Mittelwert aus mathematischen Gründen eingeführt wurde).

Für 34 Beispiele, Anlage A15, wurden die Positionswahrscheinlichkeiten nach der Rossow-Formel /70/ geordnet und über die Schadenssummen  $Q$  im Gauß'schen Wahrscheinlichkeitsnetz mit logarithmischer Abszisse aufgetragen, Anlage A16. Es handelt sich dabei um Ergebnisse des SLEBE-Programmes unter Verwendung der Hanning-Fensterfunktion (121) bzw. um Ergebnisse nach Gleichung (90). Jede Schadenssumme wurde für drei Versionen des Faktors  $u$  gemäß Abschnitt 3.4. berechnet:

$$u = \sqrt{2} \quad (\text{Programm SLEBE 1, einfachste Näherung,})$$

$$u = u(\rho) \quad \text{gültig für Schmalbandprozesse, für andere Vorgänge wird die Lebensdauer zu hart berechnet,}$$

$$u = u_B(\rho, i) \quad \text{für alle Prozesse gültig.}$$

Dadurch ergaben sich drei verschiedene Verteilungsfunktionen für  $Q$ . Unter Anwendung einer logarithmischen Normalverteilung erfolgte

die statistische Auswertung mit Hilfe des Programmes EREG /71/, so daß die Geraden im Wahrscheinlichkeitsnetz, Anlage A16, Ergebnisse einer linearen Regression nach dem Gauß'schen Fehlerquadratminimum darstellen. Die Kennwerte der Verteilungsfunktionen sind in der Tabelle 1 enthalten.

Tabelle 1: Ergebnisse der statistischen Auswertung für 34 Schadenssummen

u =	Erwartungswert	Median	Streuspanne
$\sqrt{2}$	1,12	0,92	5,02 (4,74)
$u(\rho)$	1,64	1,34	5,13 (4,73)
$u_B(\rho, i)$	1,26	0,98	6,23 (5,50)

Die Streuspanne ist hier als Verhältnis von 90 zu 10 % Erwartungswahrscheinlichkeit der Schadenssummen definiert. In Klammern sind die zusätzlich nach der Momentenmethode /72/, /74/ ermittelten Streuspannen angegeben.

### 5. Übersicht zur vorgeschlagenen Lebensdauerberechnung

Folgende wesentliche Schritte sind bei der Berechnung zu beachten:

- 1.) Digitalisierung der Beanspruchung  $\sigma(t)$  in Momentanwerte  $\sigma_i(t_i)$
- 2.) Zentrierung der Funktion  $\sigma_i(t_i)$  auf ihre konstante Mittelspannung  $\sigma_m$ . Ermittlung des Regellosigkeitskoeffizienten  $i$  und des absoluten Maximums  $\hat{\sigma}_{max}$  der zentrierten Funktion ( $\hat{\sigma}_{max}$  gilt als Spannungshorizont für die Lebensdauer).
- 3.) Umformung der Wertefolge  $\sigma_i(t_i)$  in eine Schädigungsgradientenfunktion

$$\text{z. B.} \quad \Delta D_i(t_i) = \frac{1}{K_w} \cdot \sigma_i^{+\rho} \quad (\text{für } \sigma_i > 0)$$

mit  $K_w$  und  $\rho$ : Wöhlerlinienkonstanten unter Berücksichtigung der konstanten Mittelspannung  $\sigma_m$ .

- 4.) Berechnung der diskreten einseitigen Spektralleistungen  $G_{\Delta D_i}(f_i)$  durch schnelle Fouriertransformation (blockweise Zugriff auf die Zeitfunktion  $\Delta D_i(t_i)$  und arithmetische Mittelung der Spektralleistungen aller Blöcke)
- 5.) Anwendung der Gleichung (110) bzw. (118)



Tabelle 2 zeigt noch einmal ausgewählte Gleichungen in Gegenüberstellung zur Palmgren/Miner-Formel.

Tabelle 2:

Palmgren/Miner (ohne Dauerfestigkeit)	neue Formel
$N_M = \frac{1}{\Delta D_K} \quad (51)$	$N_L = \frac{1}{\Delta D_K^2} < N_M \quad (58)$
<p><u>Schmalbandprozeß</u></p> $N_M = \frac{n_{ges}}{\sum_{K=1}^m \frac{n_K}{N_K}} \quad (25)$	$N_L = \sqrt{\frac{n_{ges}}{\sum_{K=1}^m \frac{n_K}{N_K^2}}} \quad (90)$
<p>Gauß'scher Schmalbandprozeß</p> $N_{Mi} = \frac{K_W}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right) \cdot 2^{\frac{p}{2}} \cdot \sigma_{eff}^p} \quad (23)$	$N_{Li} = \frac{K_W}{\sqrt{\Gamma(p+1)} \cdot 2^{\frac{p}{2}} \cdot \sigma_{eff}^p} \quad (128)$
<p><u>Breitbandprozeß</u>          nur für spezielle Prozesse analytisch formuliert (Näherungsansätze z. B. (35) und (46) für Gaußsche Prozesse)</p>	<p>allgemein anwendbar:</p> $T_L = \frac{1}{u_B(p, i) \cdot \sqrt{\int_0^\infty \tilde{G}_{\Delta D}(f) \cdot f^2 df}} \quad (100)$ <p><math>\tilde{G}_{\Delta D}(f)</math> aus Fouriertransformation der Funktion <math>\Delta D(t) = \frac{1}{K_W} \cdot \sigma^{+p}</math></p>
<p><u>Eingangsgrößen</u>          Häufigkeitsverteilung von Extremwerten</p>	<p>Momentanwerte</p>
<p><u>Datenaufbereitung</u>          Klassierung ausgewählter Werte, ggf. Reduktion auf ein einparametrisches Beanspruchungs-Kollektiv</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Umformung der momentanen Beanspruchungen in momentane Schädigungsgradienten <math>\Delta D_i</math></li> <li>- diskrete Fouriertransformation der Werte <math>\Delta D_i</math></li> </ul>
<p><u>Gemeinsamkeiten:</u></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>a) Wöhlerlinie als Bezugsniveau für die Schädigung</li> <li>b) Lineare Schadensakkumulationshypothese, d. h. die Reihenfolge der Schwingspiele ist ohne Einfluß auf das Ergebnis der Berechnung.</li> </ol>	



## 6. Zusammenfassung

Es wurde gezeigt, daß die Palmgren/Miner-Formel einen arithmetischen Mittelwert von Blockstufen-Schädigungsanstiegen (Gradienten) darstellt. Dieser Mittelwert liefert jedoch keine allgemein gültige Beziehung zwischen Gesamtleistung der Momentanwerte und beliebigen Amplitudenverteilungen. Deshalb ist in bisherigen Lösungsansätzen, die auf der Hypothese von Palmgren/Miner beruhen, neben der spektralanalytisch ermittelbaren Gesamtleistung ein Funktionsterm zur Charakterisierung der speziellen Amplitudenverteilung enthalten. Diese Verteilung muß extra ermittelt oder vorausgesetzt werden, weil sie maßgeblich die Lebensdauer beeinflusst. Im Unterschied dazu wurde im Abschnitt 3 ein quadratischer Mittelwert der Blockstufen-Schädigungsgradienten als Lebensdauer vorgeschlagen und gezeigt, daß dieser Mittelwert die Zerlegung in Gesamtleistung von Momentanwerten und einen für beliebige Amplitudenverteilungen gültigen Faktor erlaubt, wenn die Momentanwerte Schädigungsgradienten sind, also bereits Informationen zur Wöhlerlinie beinhalten. Die Umformung der Beanspruchungs-Zeit-Funktion in eine Schädigungsgradienten-Zeit-Funktion und deren Spektralanalyse stellt somit ein wesentliches Merkmal der verteilungsfreien Lebensdauerberechnung dar. Verteilungsfrei heißt nicht, daß die Amplituden-Häufigkeit keinen Einfluß hat, sondern daß diese maßgebliche Funktion bei Anwendung des Verfahrens nur nicht zusätzlich formuliert werden muß, weil ihre konkrete schädigende Wirkung bereits implizit erfaßt ist.

Für Schmalbandprozesse entsteht als Sonderfall eine einfache Formel (90), die ebenso leicht zu handhaben ist wie die Gleichung nach Palmgren/Miner - jedoch im Verhältnis dazu stets eine kürzere Lebensdauer ergibt.

Die verteilungsfreie spektralanalytische Lebensdauerberechnung ist in der vorgeschlagenen Form einerseits durch lineare Schadensakkumulation und andererseits durch die Anwendung digitaler Signalanalyse gekennzeichnet. In beiden Fällen entsteht für das Berechnungsergebnis eine unvermeidbare Unschärfe. Zu einer Genauigkeitssteigerung bei der digitalen Verarbeitung der Momentanwerte kann die gleitende Fouriertransformation /76 - 78/ eingesetzt werden, die bereits in Programmen für Maschinendynamik an der TU Dresden existiert /79 - 80/. Weiterhin ist zu beachten,

daß die zu transformierende Funktion erheblich streuungsbehaftet ist - nämlich die Wöhlerlinie in ihrer Gradientenform  $\Delta D(t)$ . Übliche Streuspannen für Wöhlerlinien liegen bei gekerbten Werkstoffproben zwischen 2 und 7, bei Schweißkonstruktionen sogar zwischen 6 und 11 /81/. Die Bruchwahrscheinlichkeiten der Wöhlerlinien sind selten aus mehr als 10 Einzelwerten je Spannungshorizont ermittelbar, d. h. es handelt sich um grobe Schätzungen im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Unter diesem Aspekt dürfte die im SLEBE-Programm angewandte arithmetische Mittelung der Spektralleistungen hintereinander liegender Datenblöcke (als klassische Version der gleitenden Fouriertransformation /76/) ausreichende Genauigkeit liefern. Außerdem wird für regellose Beanspruchung erst bei einer sehr großen Werteanzahl die Bedingung der Ergodizität erfüllt.

Nun zur Schadensakkumulation: Die prinzipiellen Schwierigkeiten bei der rechnerischen Lebensdauervorhersage wurden bereits ausführlich von mehreren Autoren /82 - 85/ diskutiert und betreffen vor allem die mathematische Modellierbarkeit der komplex ablaufenden Schädigungsvorgänge. Auch der Übergang vom Nennspannungszum Kerbgrundkonzept brachte bisher nicht die erhoffte Verbesserung in Form einer verringerten Streuspanne der Schadenssummen /86/, die als wesentliches Gütekriterium einer Schädigungshypothese gilt /83/.

Unabhängig von dieser Diskussion wurde in der vorliegenden Arbeit für stochastische Prozesse bei der Beschreibung der Zufallsvariablen verdeutlicht, daß die am Ende einer großen Datenmenge als "skalärer Extrakt" interessierende Lebensdauer nur ein Mittelwert sein kann. Das beginnt bei der Übertragung der berechneten Lebensdauer der ausgewählten Realisierung auf alle anderen Prozeßrealisierungen und gilt um so mehr, wenn ähnliche Prozesse in ihrer Wirkung einbezogen werden sollen, d. h. für artverwandte Einsatzfälle. Insofern besteht eine sinnvolle Einheit zwischen der theoretischen Annahme linearer Schadensakkumulation und der Beschreibung stochastischer Prozesse durch Mittelwertbildung. Ein Hauptargument gegen die lineare Hypothese und ihre zahlreichen Modifikationen /87/ ist die Tatsache, daß sie bereits für geordnete Beanspruchungsverläufe überwiegend unsichere Einzel-

ergebnisse bezüglich experimenteller Werte liefert. Im allgemeinen führen regellose Beanspruchungen mit gleichen Häufigkeitsverteilungen zu einer noch kürzeren experimentellen Lebensdauer, in bestimmten Fällen sogar auf nur 25 % /88/ und weniger /89/. Die im Abschnitt 4 erläuterten 34 Beispiele erbrachten jedoch in der Mehrzahl Schadenssummen größer eins, wobei die Streuspanne für 17 regellose Beanspruchungsverläufe nur Werte zwischen 2,5 und 3,5 annahm, Anlage A16.

Abschließend ist zu bemerken, daß in den vergangenen Jahren eine Vielzahl unterschiedlicher Schadensakkumulationshypothesen formuliert wurde. Die hier vorgeschlagene Theorie enthält demgegenüber folgende Vorteile:

1. Sie ist in Form der Gleichung (90) ebenso einfach anwendbar wie die Palmgren/Miner-Formel, führt aber stets auf kürzere Lebensdauerwerte.
2. Für beliebige deterministische oder regellose (stationär-ergodische) Breitbandprozesse wird eine durchgängige spektralanalytische Berechnung mit FFT auf der Basis der Momentanwerte ermöglicht. Eine Klassierung ist nicht erforderlich.

Die Streuspanne der Schadenssummen weiterer zahlreicher Beispiele wird auch hier ein wichtiges Kriterium für zukünftige Anwender sein.

7. Wesentliche Formelzeichen im Teil I

$A(jf)$	komplexes Amplitudenspektrum
$\tilde{A}(jf)$	komplexe Amplitudendichte
$C$	Crestfaktor
$D$	Schädigung
$D^2\{\dots\}$	Integraloperator der Dispersion
$\Delta D = 1/N$	linearer Schädigungsgradient (Anstieg)
$\Delta D_k$	Stufen-Schädigungsgradient der Stufe $K$
$\Delta D(t)$	Schädigungsgradienten-Zeit-Funktion
$\Delta D_{\text{eff}}$	Effektivwert der Funktion $\Delta D(t)$
$E\{\dots\}$	Integraloperator der Erwartungswertbildung
$F(\dots)$	Wahrscheinlichkeits-Verteilungsfunktion
$f, f_0, f_1, \dots$	Frequenzen
$f_1(\dots), f_2(\dots), \dots$	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
$F\{\dots\}$	Integraloperator der Fouriertransformation
$F^{-1}\{\dots\}$	inverse Fouriertransformation
$G(f)$	reelle, einseitige Spektralleistung
$\tilde{G}(f)$	reelle, einseitige Spektraldichte
$i$	Regellosigkeitskoeffizient
$j = \sqrt{-1}$	
$K_W$	Konstante der Wöhlerlinie
$K(\tau)$	Autokorrelationsfunktion eines stationären Prozesses
$N$	Bruch-Schwingspielzahl
$n$	Schwingspielzahl der Beanspruchung bzw. S. 23 - 29 Anzahl der Meßwerte im Zeitbereich $T$ eines Zeit- blockes
$p_1(\dots)$	Häufigkeits-Dichtefunktion
$Q$	Schadenssumme

$S$	Leistung
$S(f)$	reelle, zweiseitige Spektralleistung
$\tilde{S}(f)$	reelle, zweiseitige Spektraldichte
$t, T$	Zeit
$t_F$	Transientenfaktor
$u, u_B(\dots)$	Faktor zwischen Effektivwert und quadratischem Mittelwert der Amplituden
$x$	deterministische Variable
$X$	Zufallsvariable
$X(t)$	Zufallsprozeß
$\Gamma$	Gammafunktion
$\mu$	Erwartungswert
$\sigma$	Spannung (Beanspruchung) in MPa
$\sigma_{\text{eff}}$	Effektivwert der Spannung
$\hat{\sigma}, \check{\sigma}$	Beanspruchungs-Maximum bzw. -Minimum eines Schwingenspieles
$f$	Wöhlerlinienexponent
$\psi$	Mittelspannungsempfindlichkeit
$\omega$	Eigenkreisfrequenz
$\langle \rangle$	arithmetischer Mittelwert
$\overline{\langle \rangle^2}$	quadratischer Mittelwert = $\sqrt{\langle \rangle^2}$

Die anderen im Text erläuterten Formelzeichen wurden nicht mehrfach zitiert.



Berechnung räumlicher Spannungen in den Gleitebenen von Zweiteilchen - Sintermodellen mit FEM

1. Einleitung

Die zunehmende Bedeutung der Pulvermetallurgie für eine abfallfreie und energiesparende Massenproduktion von Formteilen führte zu einem wachsenden Interesse an den theoretischen Grundlagen des Sinterns. Eine geschlossene physikalische Theorie gibt es dazu nicht, weil abhängig vom sinternden System und verschiedenen Parametern stets mehrere, sich gegenseitig beeinflussende Vorgänge ablaufen. Um gezielt in den pulvermetallurgischen Fertigungsprozeß eingreifen zu können, besteht daher das Anliegen der gegenwärtigen Sintertheorie vorrangig in der Erforschung elementarer Teilvorgänge und ihrer komplexen Wechselwirkung.

Triebkraft des Sinterns ist wie bei allen selbständig ablaufenden Vorgängen die Differenz der freien Energie zwischen Anfangs- und Endzustand. Dabei wird die Energiedifferenz durch Reduzierung äußerer und innerer Oberflächen, Strukturdefekte und Ungleichgewichtszustände abgebaut. Im Ergebnis schwindet das poröse Formteil zu einem festeren und dichteren Sinterkörper.

Wird kein äußerer Preßdruck aufgebracht, so handelt es sich um "freiwilliges" Sintern. In diesem Fall schwindet und verdichtet sich der disperse Körper ausschließlich infolge von Kapillarkräften, die durch die Oberflächenspannung erzeugt werden. Der Materialtransport erfolgt vorwiegend über Diffusionsvorgänge /90/, die als Leerstellenstrom von den als Quellen wirkenden Poren zu den Leerstellensenken bzw. als entgegengesetzter Atomstrom interpretierbar sind. Als vorrangige Leerstellensenken wurden bisher die Gefügegrenzen angesehen. Allein damit läßt sich aber die große Geschwindigkeit und der Betrag der Formänderung des Sinterkörpers im Schwindungsstadium nicht ausreichend erklären /91/, /92/. Sie werden jedoch verständlich, wenn die während des Sinterns wirkenden Versetzungen als effektive Leerstellensenken zusätzlich berücksichtigt werden /93/ - /95/. Nach der von Schatt und Friedrich begründeten Selbstaktivierungstheorie /91/ - /93/, /96/ entstehen im Gebiet der Teilchenkontakte unter dem Einfluß von Kapillarspannungen Zonen hoher Versetzungsdichte. Die in diesen Zonen ablaufende spontane



Versetzungsvervielfachung setzt voraus, daß die äußeren Kapillarspannungen eine bestimmte Größe und Reichweite aufweisen, um die im Kontaktgebiet vorhandenen Versetzungsquellen aktivieren zu können. Dafür muß die Kapillarspannung bei einem Multiplikationsmechanismus vom Typ der Frank-Read-Quelle im Innern der Pulverteilchen Schubspannungen auf den Gleitebenen induzieren, die die Versetzungsquellen-spannung des Werkstoffes übersteigen und soweit reichen, daß Versetzungssegmente ausgebaucht, d. h. aktiviert werden können. Die Versetzungsvervielfachung erfordert also ein aktivierbares Volumen bestimmter Ausdehnung.

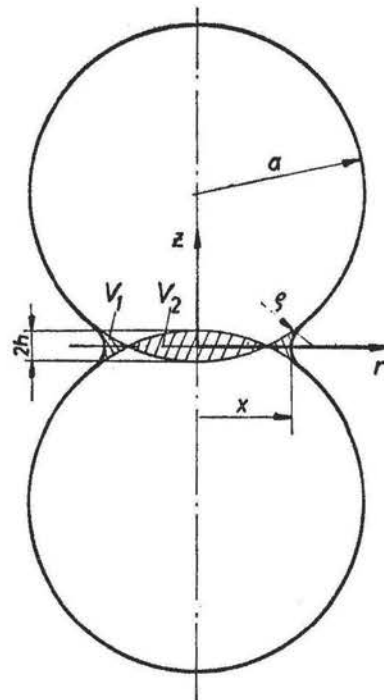
Zur theoretischen Klärung über die Entstehung aktivierbarer Volumina, deren Größe die Versetzungsquellenlänge übertreffen, trägt die Kenntnis der räumlichen Verteilung der in den Gleitebenen herrschenden Schubspannungen wesentlich bei. Diese Spannungen sind mit numerischen Verfahren effektiv berechenbar. In der vorliegenden Arbeit werden sie mit der Finite-Element-Methode (FEM) für mehrere Sinterstadien ermittelt und gemessenen Versetzungsdichte-Verteilungen gegenüber gestellt. Für die Untersuchungen wurde Kupferpulver verwendet.

Die Messungen erfolgten von anderen Autoren aus technischen Gründen an Kugel-Platte-Sinterpartnern. Im Unterschied dazu wurden die FEM-Berechnungen für Zweikugel-Sintermodelle durchgeführt. Die Ergebnisse sind trotzdem sehr gut vergleichbar, weil sich in beiden Fällen die typische stark gekrümmte Sinterhalszone und die daraus folgende Beanspruchung durch Kapillarkräfte ausbildet.

## 2. Das Zweiteilchen - Sintermodell

### 2.1. Geometrie

Zur Idealisierung der Vorgänge während des Sinterns wird das reale Pulverteilchen zweckmäßig durch ein geometrisch einfaches Zweiteilchen-Modell ersetzt /97/. Während für experimentelle Untersuchungen das Kugel-Platte-System dominiert, wird für theoretische Arbeiten das Zweikugelmodell nach Bild 13 bevorzugt.



- $V_1$  Volumen der Halsperipherie
- $V_2$  Volumen der Abplattung
- Halskrümmungsradius
- $a$  Teilchenradius
- $h$  halbe Zentrumsannäherung
- $\rho$  Halskrümmungsradius

Bild 13: Idealisiertes Zweiteilchen-Modell mit Zentrumsannäherung

Wesentliche Größen zur Beschreibung des Sinterverlaufes sind die beiden experimentell erfaßbaren Werte  $2h$  für die Zentrumsannäherung als Schwindungsmaß und der Halsradius  $x$ .

Wenn das Volumen  $V_2$  der Abplattung dem Volumen  $V_1$  der Halsperipherie entspricht, ist während des Sinterns Volumenkonstanz gewährleistet. Der Halskrümmungsradius  $\rho$  berechnet sich dann zu /98/:

$$\rho = \frac{x^2 - 2ah + h^2}{2(a - x)} \quad (129)$$

Daraus folgt unter den Vereinfachungen  $a \gg x$  und  $h \approx \rho$ :

$$\rho = \frac{x^2}{4a} = \frac{a}{4} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^2 \quad (130)$$

Gleichung (130) liefert für Geometrieverhältnisse  $\frac{x}{a} < 0,3$  bei Kugelmodellen geringe Fehler /98/ und wurde zur Konstruktion des in Bild 13 dargestellten Modelles verwendet.

Verschiedene Sinterstadien können damit durch Variation des Halskrümmungsradius und Halsradius einfach simuliert werden.

## 2.2. Äußere Belastung beim freiwilligen Sintern

Wird kein äußerer Preßdruck aufgebracht, so wirkt während des Sinterns lediglich die Oberflächenenergie als Triebkraft des Materialtransportes. Die Herabsetzung der Energie erfolgt dabei durch Atom-Umlagerungen. Die Änderung der freien Energie  $dW$  eines dispersen Systems lautet

$$dW = \gamma \cdot dA \quad (131)$$

mit  $\gamma$ : Oberflächenspannung,  $dA$ : Oberflächenänderung.

Wird ein Volumenelement  $dV$  von einem Punkt mit den beiden Hauptkrümmungsradien  $R_1$  und  $R_2$  abgetragen oder angelagert, so gilt für die spezifische Energieänderung  $dW^*$  /99/:

$$dW^* = \frac{dW}{dV} = \gamma \cdot \frac{dA}{dV} = \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (132)$$

Diese Gleichung entspricht der in der Hydromechanik verwendeten Laplaceschen Gleichung für den Kapillardruck /100/:

$$P_L = \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (133)$$

der stets senkrecht auf die gekrümmte Oberfläche gerichtet ist, Bild 14.

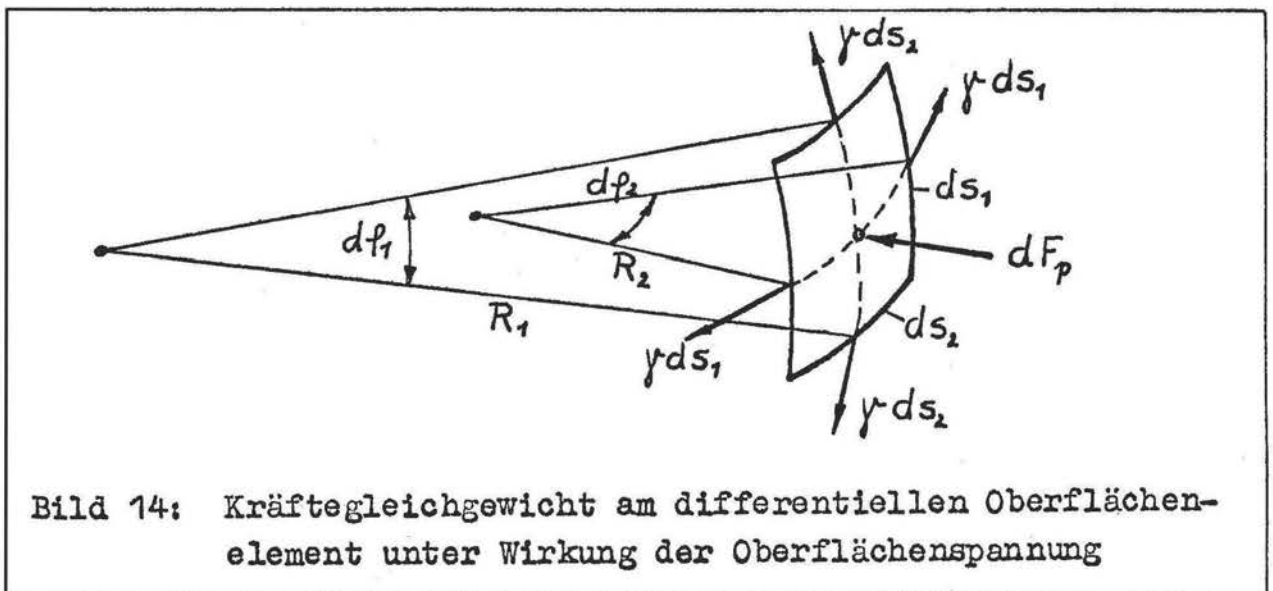


Bild 14: Kräftegleichgewicht am differentiellen Oberflächen-element unter Wirkung der Oberflächenspannung

Die Kraft  $dF_p$  entsteht aus den Komponenten der Schnittkräfte  $\gamma ds_1$  am Flächenelement  $dA = ds_1 \cdot ds_2$ :

$$dF_p = \gamma \cdot ds_2 \cdot d\varphi_1 + \gamma \cdot ds_1 \cdot d\varphi_2 \quad (134)$$

Mit  $d\varphi_1 = ds_1/R_1$  und  $d\varphi_2 = ds_2/R_2$  folgt aus (134):

$$dF_p = \gamma \cdot \left( \frac{ds_2 \cdot ds_1}{R_1} + \frac{ds_1 \cdot ds_2}{R_2} \right) \quad (135)$$

bzw.

$$P_L = \frac{dF_p}{ds_1 \cdot ds_2} = \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (136)$$

Auf den konvexen Kugeloberflächen gilt wegen  $R_1 = R_2 = a$ :

$$P_a = \frac{2\gamma}{a} \quad (137)$$

und auf der konkaven Halskontur im engsten Querschnitt entsteht der maximale Laplace-Druck in Form einer Zugbeanspruchung:

$$P_{max} = \gamma \cdot \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\varrho} \right) \quad (138)$$

Als äußere Belastung wirkt also auf der gesamten Körperoberfläche nur der von der Krümmung abhängige Laplace-Druck, so daß beim freiwilligen Sintern eine enge Beziehung zwischen Geometrie und Belastung besteht.

### 2.3. Beschreibung der realen Oberflächenkontur

#### 2.3.1. Ausbildung von Hinterschneidungen

Bei dem in Bild 13 gezeigten Modell wird die Meridiankontur durch zwei tangierende Kreise der unterschiedlichen Radien und  $a$  realisiert. Am Berührungspunkt beider Kreise entsteht deshalb ein Krümmungssprung, der dazu führt, daß die als Zugspannung im konkaven Halsbereich wirkende Laplace-Spannung abrupt in eine wesentlich kleinere Druckspannung auf der konvexen Oberfläche übergeht:

$$P_1 = -\gamma \cdot \frac{x}{\varrho x + \varrho^2} \rightarrow P_a = +\gamma \cdot \frac{2}{a} \quad (139)$$

Dieser Krümmungssprung ist jedoch thermodynamisch nicht stabil /101/. Jeder Materialtransportmechanismus außer Korngrenzen-diffusion würde eine derartige Unstetigkeitsstelle ausgleichen /98/. Tatsächlich reagiert das Material durch ein Abtragen

der Oberfläche, wodurch ein allmählicher Krümmungswechsel erzielt wird. Dadurch entstehen "Hinterschneidungen", wie sie bei experimentellen Untersuchungen an Silberkugeln /102/ sowie Kupfer- und Glaskugeln /98/ beobachtet wurden, Bild 15.

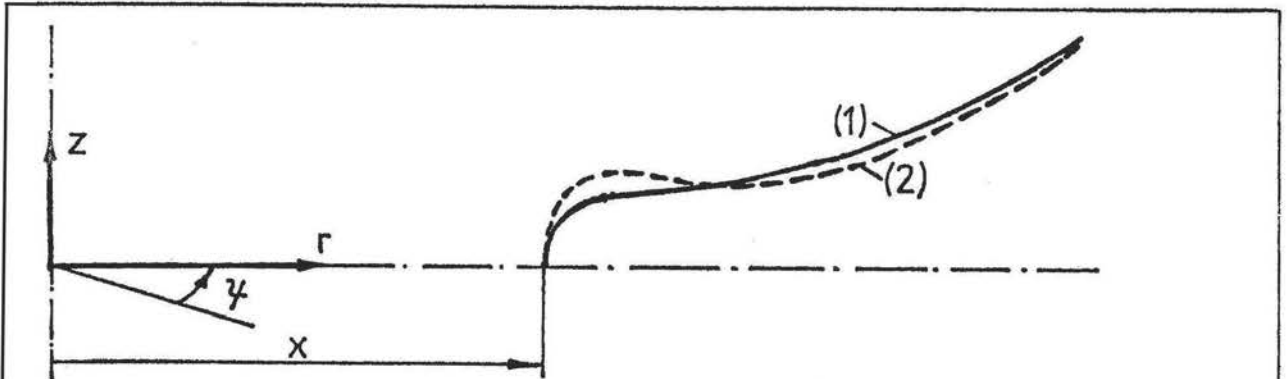


Bild 15: Halskontur: (1) nach Bild 13, (2) mit Hinterschneidung

Diese Hinterschneidungen verändern vorrangig die Belastungsverteilung in der Halskonturzone, wo offensichtlich der Sinterprozeß am meisten vorangetrieben wird. Deshalb haben sich bereits mehrere Autoren mit der mathematischen Modellierung der Hinterschneidungen befaßt.

### 2.3.2. Numerische Simulation der Halskontur

Um den sprunghaften Krümmungswechsel zu mildern, ersetzten z.B. German und Munir /103/ am idealisierten Zweiteilchenmodell die Kreiskontur in der Halszone durch eine hyperbolische Kosinusfunktion. Trotzdem bleibt eine abrupte Krümmungsänderung erhalten /98/ und es wird auch damit noch keine Hinterschneidung beschrieben.

Für eine realistische Darstellung der Oberflächenkontur gibt es bisher noch keine analytischen Beziehungen. Jedoch konnten bereits Nichols und Mullins /104/ das Problem auf numerischem Weg lösen. Dabei wird die Differentialgleichung für einen konkreten Materialtransport-Mechanismus in eine Differenzengleichung überführt und für kleine Zeitintervalle die Verformung der Oberfläche und damit gleichzeitig ihre Laplace'sche Belastung simuliert. Der Ausgangszustand wird durch die Geometrie und Belastungsverteilung am idealisierten Zweiteilchenmodell charakterisiert. Nichols und Mullins erhielten auf diese Weise Ergebnisse für Oberflächendiffusion als ausschließlich wirkenden Mechanismus. Bross /105/ und Exner /106/ haben das Verfahren



in einem neu entwickelten Programmsystem übernommen und auf Oberflächen- und Volumendiffusion angewendet.

Ross /107/ setzte für ähnliche Untersuchungen finite Elemente ein und berechnete ebenfalls durch sukzessive Änderung der Randkontur- und Belastungsparameter bei vorgegebenen Transport-Mechanismen Hinterschneidungen für verschiedene Sinterstadien.

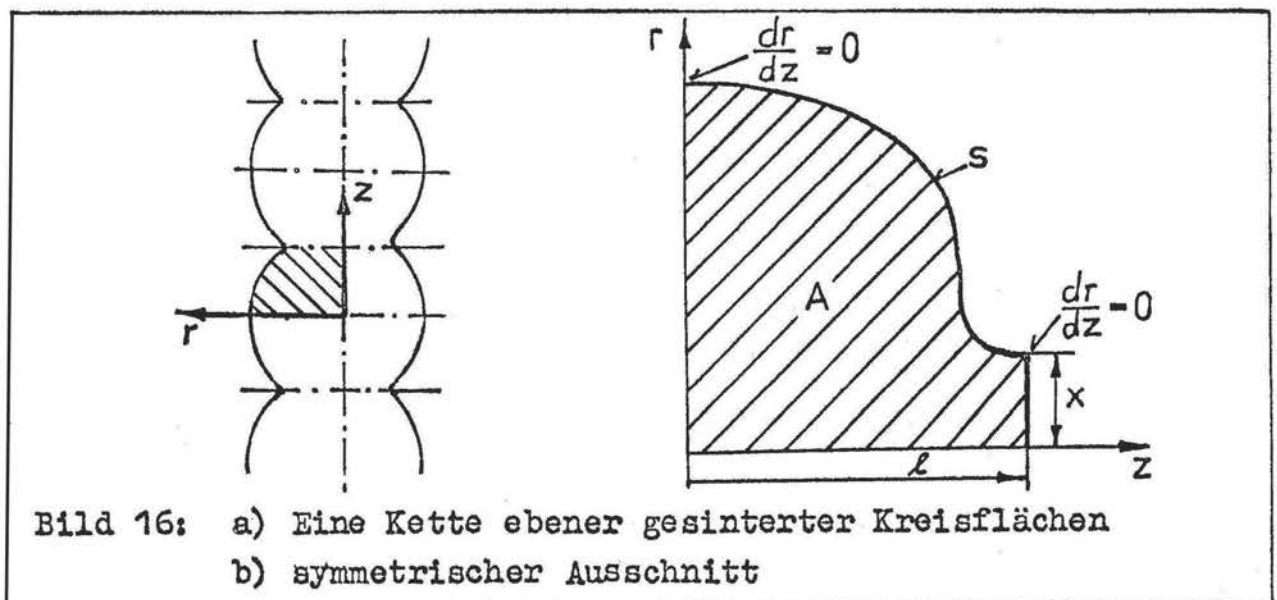
Allen numerischen Lösungen ist gemeinsam, daß sie nicht einfach durch eine analytische Gleichung für den gesamten Sinterprozeß beschreibbar sind. Noch wesentlicher ist die Einschränkung auf bestimmte Materialtransport-Mechanismen. Im Realfall überlagern sich stets mehrere Mechanismen. Diese Überlagerung erfolgt jedoch komplex und müßte durch zusätzliche Annahmen modelliert werden.

### 2.3.3. Formulierung als Variationsproblem

Im folgenden wird ein mathematischer Lösungsweg vorgeschlagen, der die Berechnung der Halskontur ohne Vorgabe spezieller Transport-Mechanismen ermöglicht. Allerdings ist hier die Herleitung auf ein ebenes Problem beschränkt und endet vorerst bei der Differentialgleichung.

Gegeben sei eine Kette gesinterter, ebener Kreisflächen, Bild 16. Der Abstand  $z = l$  zwischen den waagerechten Symmetrielinien ergibt sich entsprechend Bild 13 aus dem Schwindungsmaß  $h$  (halbe Zentrumsannäherung) und dem Teilchenradius:

$$l = a - h \quad (140)$$





Die Oberflächenenergie ist bei minimaler Oberfläche am kleinsten. Das bedeutet hier, die Bogenlänge  $s$ , Bild 16 b, zu minimieren. Dafür geeignet ist die Formulierung einer Variationsaufgabe:

$$\int_0^l ds = \text{Extr.} \quad (141)$$

bzw. durch Einsetzen der Relation  $ds^2 = dr^2 + dz^2$

$$\int_0^l \sqrt{1 + r'^2} dz = \text{Extr.} \quad (142)$$

mit  $r' = dr/dz$ .

Der konstant bleibende Flächeninhalt  $A$  wird durch eine Nebenbedingung in Integralform (isoperimetrisches Variationsproblem) berücksichtigt:

$$\int_0^l r dz = A \quad (143)$$

Bis hierhin entsteht als Lösung ein einfacher Kreisbogen /108/. Da aber beim Halsradius  $r = x$  aus Symmetriegründen die Neigung

$$m_0 = \frac{dr}{dz} = 0 \quad (144)$$

vorhanden sein muß, ist diese in Form einer zweiten Nebenbedingung zu formulieren:

$$\int_0^l r'' dz = m_0 \quad (145)$$

mit  $r'' = d^2r/dz^2$ .

Die Randbedingung auf der  $r$ -Achse wird automatisch durch die Transversalitätseigenschaft /109/ erfüllt, weil dieser Rand frei beweglich ist.

Die zur Variationsaufgabe (142) mit den Nebenbedingungen (143) und (145) gehörende Grundfunktion /108/, /110/ lautet:

$$H(z, r, r', r'') = \sqrt{1 + r'^2} + \lambda \cdot r + \mu \cdot r'' \quad (146)$$

mit den Lagrangeschen Multiplikatoren  $\lambda$  und  $\mu$ .

Folgende Eulersche Differentialgleichung 2. Ordnung ist dem Variationsproblem zugeordnet:

$$\frac{\partial H}{\partial r} - \frac{d}{dz} \left( \frac{\partial H}{\partial r'} \right) + \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{\partial H}{\partial r''} \right) = 0 \quad (147)$$

Aus (147) entsteht zunächst ein Zwischenintegral:

$$H - \frac{\partial H}{\partial r'} \cdot r' + \frac{\partial H}{\partial r''} \cdot r'' = C_1 \quad (148)$$

unter Beachtung von  $r'' = dr'/dz$  und  $C_1$  als Integrationskonstante. Weiterhin folgt aus (146):

$$\frac{\partial H}{\partial r'} \cdot r' = \frac{r'^2}{\sqrt{1+r'^2}} \quad (149)$$

und

$$\frac{\partial H}{\partial r''} \cdot r'' = \mu \cdot r'' \quad (150)$$

Einsetzen von (149), (150) und (146) in (148) liefert:

$$\sqrt{1+r'^2} + \lambda \cdot r + \mu \cdot r'' - \frac{r'^2}{\sqrt{1+r'^2}} + \mu \cdot r'' = C_1 \quad (151)$$

bzw. umgeformt entsteht die dem vorgestellten isoperimetrischen Variationsproblem äquivalente Eulersche Gleichung:

$$2\mu \cdot r'' + \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} + \lambda \cdot r = C_1 \quad (152)$$

Es handelt sich dabei um eine nichtlineare Differentialgleichung mit 5 freien Koeffizienten  $C_1, \lambda, \mu$  sowie  $C_2, C_3$  (Integrationskonstanten).

Zur Ermittlung der speziellen Lösung  $r(z)$  werden also 5 Gleichungen benötigt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Drei Randbedingungen: } r(z=l) = x \\ r'(z=0) = 0 \\ r'(z=l) = 0 \end{array} \right\} \quad (153)$$

und die Nebenbedingungen (143), (145):

$$\int_0^l r \, dz = A \quad , \quad \int_0^l r'' \, dz = 0$$

Eine allgemeine analytische Lösung für (152) wurde nicht gefunden. Der Vorteil einer derartigen Lösung einschließlich ihrer Koeffizienten - Ermittlung wäre, daß sie nur von den experimentell zugänglichen Werten  $h, x$  und  $A$  abhängig ist. Deshalb könnte auch eine numerische Behandlung der Differentialgleichung /111/, /112/ von Nutzen sein.

### 3. Versetzungsvervielfachung in den Gleitebenen

#### 3.1. Kritische Quellenspannung

Allein durch die Wirkung von Kapillarkräften entstehen Spannungen, die während des Sinterns zur Versetzungserzeugung ausreichend sind. Das belegen verschiedene Experimente an einkristallinen Kugel-Platte- und Kugel-Kugel-Modellen aus Kupfer /91/, /92/, /96/, /113/. Interpretiert man die Versetzungsvervielfachung nach dem Frank-Read-Mechanismus, so läßt sich daraus eine kritische Schubspannung  $\tau_{krit}$  als Quellenspannung  $\tau_Q$  ableiten. Nach der Linienspannungsnäherung /114/ gilt:

$$\tau_{krit} = \tau_Q = \frac{G \cdot b}{l} \quad (154)$$

Bei dieser Näherung wird von der Vorstellung ausgegangen, daß sich eine Versetzungslinie wie eine gespannte elastische Schnur mit konstanter Spannung verhält. Eine andere Abschätzung über den Energiesatz /114/ liefert:

$$\tau_{krit} = \frac{1}{3} \cdot \frac{G \cdot b}{l} \quad (155)$$

Für Reinstkupfer sind folgende Werte zu verwenden:

$G \approx 10^4$ MPa	Gleitmodul bei 1000°C /115/
$b = 2,56 \cdot 10^{-7}$ mm	Betrag des Burgers-Vektors
$l = \frac{1}{\sqrt{N}} = 10^{-2}$ mm	mittlerer Versetzungsabstand für eine beobachtete Ausgangsversetzungsdichte $N_A \approx 10^{-6} \text{ cm}^{-2}$ /113/.

Damit ist die kritische Schubspannung direkt von der Versetzungsdichte  $N$  abhängig. Z. B. folgt aus (154):

$$\tau_{krit} = G \cdot b \cdot \sqrt{N} \quad (156)$$

Die ungünstigere Abschätzung nach Gleichung (154) liefert folgende kritische Schubspannung für 1000°C:

$$\tau_{krit} \approx 0,25 \text{ MPa}$$

Diese Schubspannung muß durch die Wirkung der außen angreifenden Laplace-Spannung mindestens überschritten werden, um Versetzungen zu betätigen. Das kann aber nur geschehen, wenn  $\tau_{krit}$  über die gesamte Länge  $l$  der Versetzungsquellen wirkt. Außerdem können

Versetzungen nur in den Gleitebenen verschoben werden, d. h. in den Ebenen, die ihren Burgers-Vektor enthalten. Deshalb hat es wenig Sinn, etwa Schubspannungen  $\tau_{rz}$  (parallel zu den Symmetrielinien des Sintermodellkörpers) zu berechnen. Diese sind außerdem ohnehin in der Rotationsachse und in der Kontaktebene gleich Null, also gerade dort, wo große Aktivität beobachtet wird.

### 3.2. Zeitabhängige Veränderung der Versetzungsdichte

Die Wirkung der Versetzungen im Sinterprozeß kann allgemein durch einen effektiven Diffusionskoeffizienten  $D_{\text{eff}}$  /113/ beschrieben werden:

$$D_{\text{eff}} = \frac{\bar{N}}{N_{\text{eff}}} \cdot D_s \quad (157)$$

mit  $D_s$ : Koeffizient des vorherrschenden Diffusionsmechanismus, z. B. Volumendiffusion

$\bar{N}$ : mittlere erhöhte Versetzungsdichte im Kontaktgebiet

$N_{\text{eff}}$ : effektive Versetzungsdichte.

Wenn die Gesamtheit der Versetzungen gegenüber den Gefügegrenzsenken als Leerstellenabsorber überwiegend wirksam sein soll, muß die Versetzungsdichte  $N_{\text{eff}}$  überschritten werden.  $N_{\text{eff}}$  ist nach Geguzin /116/ abschätzbar:

$$N_{\text{eff}} \geq \left( \frac{1}{10 \Omega \cdot \bar{L}^2} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (158)$$

mit  $\Omega$ : Leerstellenvolumen und  $\bar{L}$ : mittlere Linearkorngröße  
Während des Sinterns bleibt die Versetzungsdichteverteilung nicht konstant.

Die Änderung der Versetzungsdichte mit der Sinterdauer läßt sich folgendermaßen beschreiben /113/:

$$\frac{dN}{dt} = - \frac{v_k \cdot \bar{N} \cdot A}{V} \quad (159)$$

mit  $A$ : Oberfläche,  $V$ : aktivierbares Volumen (Gebiet mit der Versetzungsdichte  $\bar{N}$ ) und  $v_k$ : Klettergeschwindigkeit der Versetzungen /116/:

$$v_k = \frac{2\pi}{\ln(\ell/r_0)} \cdot \frac{D_s \cdot \Omega \cdot G_v}{b \cdot k \cdot T} \quad (160)$$

mit  $l$  und  $b$  wie in (155),  $r_0 \approx 2b$ : Radius des Versetzungskernes,  $k$ : Boltzmann-Konstante,  $T$ : Temperatur in Kelvin und die Spannung  $\sigma_v$ , die sich aus dem Verzerrungsfeld der Versetzungen in Abhängigkeit vom Gleitmodul  $G$  und der Querkontraktionszahl  $\nu$  ergibt:

$$\sigma_v = \frac{G \cdot b \cdot \sqrt{N}}{2\pi(1-\nu)} \quad (161)$$

Der Vergleich zwischen theoretischen Werten nach Gleichung (159) und experimentellen Ergebnissen zeigte /113/, daß die Versetzungsdichte in Wirklichkeit nicht so schnell abfällt. Die angegebene Formel beschreibt lediglich pauschal den Gesamtzustand und nicht die Änderung der Versetzungsdichteverteilung in den verschiedenen Sinterstadien. Eine detaillierte Erfassung dieses zeitabhängigen Vorganges ist jedoch meßtechnisch gut möglich.

Anlage B1 zeigt ein Versetzungsätzbild für einen realen Sinterkontaktbereich und die über diesem Bereich gemessene Verteilung der Versetzungsdichte /117/. Es handelt sich hier um eine Sinterzeit von 4 Stunden und eine Sintertemperatur von  $1000^\circ\text{C}$ . Die Versetzungsdichte wurde mittels Kossel-Technik /118/ gemessen. Dabei wird durch einen fokussierten Elektronenstrahl in der zu untersuchenden Probe eine charakteristische Röntgenstrahlung angeregt. Die Breite der Röntgeninterferenzen (Kossellinien) stellt ein quantitatives Maß für die Versetzungsdichte dar. Damit ist es möglich, für jede beliebige Sinterzeit die konkrete Versetzungsdichteverteilung zu ermitteln.

Die Kosseltechnik stellt gegenwärtig das einzige Verfahren dar, mit dem ohne größeren Aufwand Versetzungsdichteverteilungen meßbar sind /118/, weil es ein hohes Ortsauflösungsvermögen besitzt und ohne spezielle Probenpräparation auskommt. Im Vergleich zur Intensität und Form der Kossellinien /119/ ist die Linienbreite relativ einfach meßtechnisch erfaßbar /120/ und kann mit Hilfe von Eichproben der Versetzungsdichte zugeordnet werden.



#### 4. Schubspannung $\tau_{uv}$ in den Gleitebenen

Für eine Berechnung von Spannungen ist die Rotationssymmetrie des idealisierten Zweiteilchenmodelles sehr vorteilhaft, weil damit das räumliche Problem auf ein quasi-ebenes reduzierbar wird. Infolge der Rotationssymmetrie sind in jedem Axialschnitt die Spannungszustände identisch. Wird außerdem die Teilchen-Symmetrie genutzt, so kann die eigentlich räumliche Spannungsverteilung durch eine quasi-ebene Berechnung nur eines Axialschnitt-Viertels, siehe Anlage B2, vollständig ermittelt werden. Speziell für die Gleitebenen kann jedoch nicht allgemein Rotationssymmetrie vorausgesetzt werden. Deshalb sei ein idealisierter Zustand betrachtet, in dem sich die kubisch flächenzentrierten Gitter-Elementarzellen des Kupfers /121/, /122/, Bild 17a, symmetrisch zur Rotationsachse gruppieren.

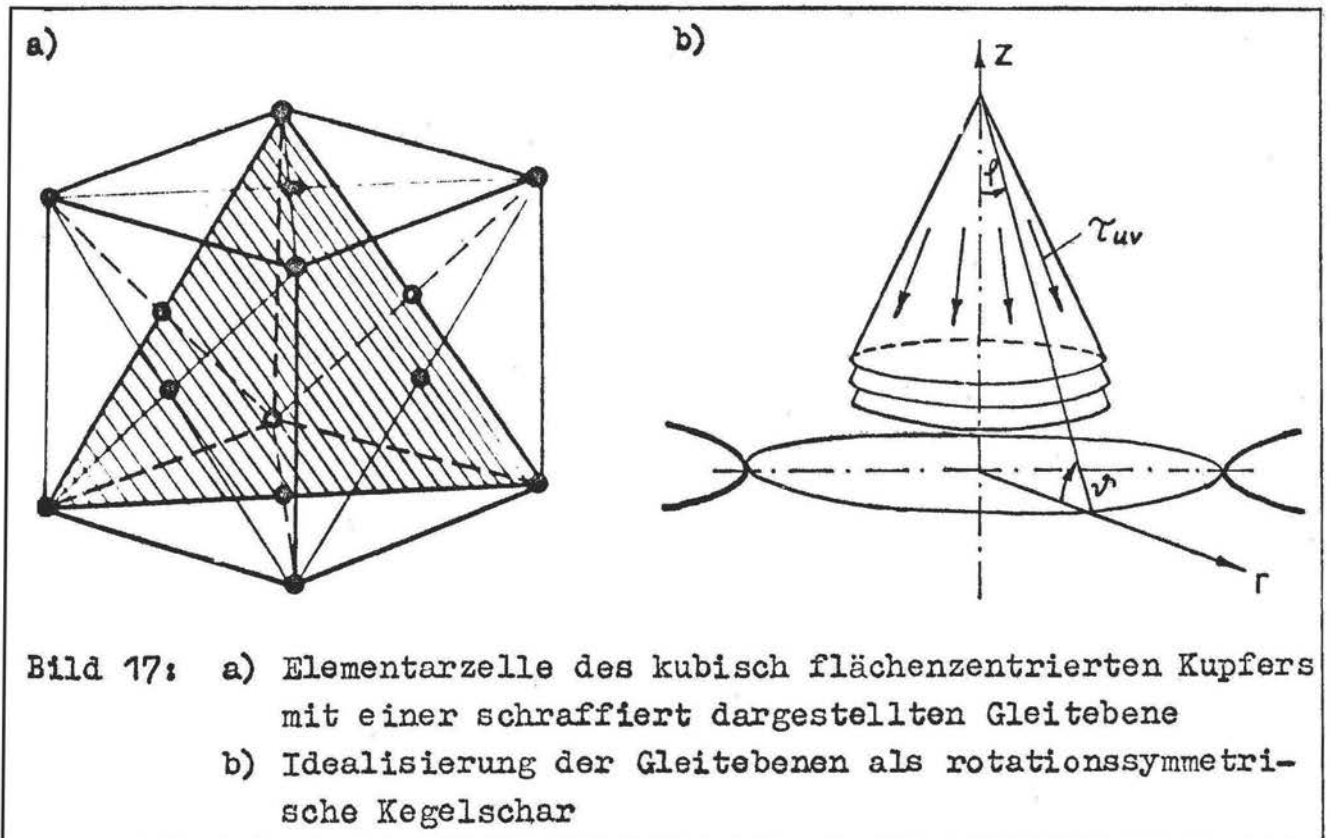


Bild 17: a) Elementarzelle des kubisch flächenzentrierten Kupfers mit einer schraffiert dargestellten Gleitebene  
b) Idealisierung der Gleitebenen als rotationssymmetrische Kegelschar

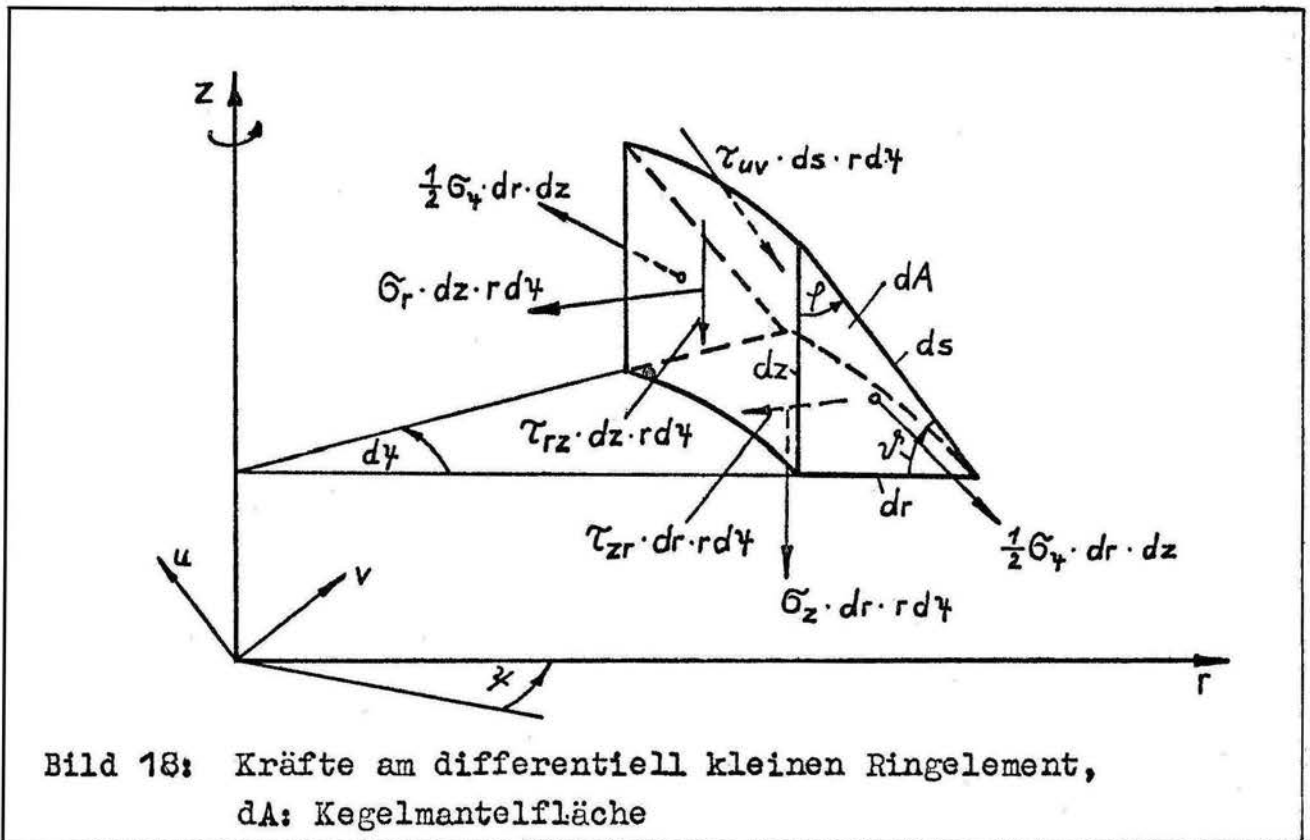
Dann bilden die zugehörigen Gleitebenen eine Schar paralleler Pyramiden, deren Hauptachse die Rotationsachse z des Zweiteilchenmodelles ist.

Die Gleitebenen sind hier die Oktaederflächen der Elementarzelle mit dichtester Packung /122/, d. h. gemäß den Millerschen Indizes die  $\{111\}$ - Ebenen.



Wird ferner die sechseckförmige Pyramidengrundfläche als Kreis idealisiert, so entsteht eine Schar paralleler Kegel, Bild 17b, deren Mantelflächen um den Winkel  $\varphi$  gegen die Rotationsachse bzw. um den Winkel  $\psi = 90^\circ - \varphi$  gegen die Kontakthalsebene ( $z = 0$ ) geneigt sind /123/.

Die rotationssymmetrische Schubspannung  $\tau_{uv}$  auf den Kegelmantelflächen ist dann aus dem Kräftegleichgewicht an einem differentiell kleinen Ringelement ermittelbar, Bild 18.



Das Kräftegleichgewicht in positiver  $\tau_{uv}$ -Richtung lautet /123/:

$$\tau_{uv} \cdot ds \cdot r \cdot d\varphi - \sigma_r \cdot dz \cdot rd\varphi \cdot \sin \varphi + \sigma_z \cdot dr \cdot rd\varphi \cdot \cos \varphi + \tau_{rz} \cdot dz \cdot rd\varphi \cdot \cos \varphi - \tau_{zr} \cdot dr \cdot rd\varphi \cdot \sin \varphi = 0 \quad (162)$$

Für  $r \gg dr$  kann die durch die Tangentialkomponente  $\sigma_\varphi$  hervorgerufene Kraft  $F_t = \frac{1}{2} \sigma_\varphi \cdot dr \cdot dz \cdot d\varphi$  in r-Richtung vernachlässigt werden. Gleichung (162) ist damit nur in unmittelbarer Umgebung der Rotationsachse ungenau.

Mit  $dr = ds \cdot \sin \varphi$ ,  $dz = ds \cdot \cos \varphi$  und  $\tau_{rz} = \tau_{zr}$  entsteht aus (162) die Beziehung:

$$\tau_{uv} = (\sigma_r - \sigma_z) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi - \tau_{rz} \cdot \cos 2\varphi \quad (163)$$

Im rotationssymmetrischen Fall verschwinden die Schubspannungen in tangentialer Richtung. Außerdem gilt die Beziehung  $\tau_{rz} = \tau_{zr}$ . Dadurch verbleiben im Spannungstensor  $\{\sigma_{ik}\}$  noch drei Normalspannungen  $\sigma$  und eine Schubspannung:

$$\{\sigma_{ik}\} = \begin{pmatrix} \sigma_r & \tau_{rz} & \tau_{r\varphi} \\ \tau_{zr} & \sigma_z & \tau_{z\varphi} \\ \tau_{\varphi r} & \tau_{\varphi z} & \sigma_\varphi \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Rot. symm.}} \begin{pmatrix} \sigma_r & \tau_{rz} & 0 \\ \tau_{rz} & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\varphi \end{pmatrix} \quad (164)$$

Außer der Tangentialspannung  $\sigma_\varphi$  werden somit in Gleichung (163) alle Komponenten des rotationssymmetrischen Spannungstensors zur Berechnung der Schubspannungen  $\tau_{uv}$  in den Gleitebenen benötigt.

## 5. Berechnung der Spannungsverteilung mit finiten Elementen

### 5.1. Anwendung der FEM

Bisherige analytische Angaben bzw. spannungsoptische Ergebnisse zur Spannungsverteilung basieren auf vereinfachten Belastungsverhältnissen und sind zum Teil auf die Kontakthalsebene beschränkt, z. B. /124/ - /132/. Die für den Frank-Read-Mechanismus maßgebliche Schubspannung ist jedoch aus räumlichen Spannungsverteilungen abzuleiten. Diese entstehen beim freiwilligen Sintern infolge der Kapillarkräfte, die unmittelbar durch die sinterzeitbedingte Oberflächenform erzeugt werden. Dem entsprechend muß bei der rechnerischen Ermittlung der Spannungsverteilung ein Elastizitätsproblem mit komplizierten Randbedingungen gelöst werden. Deshalb kann eine analytische Behandlung nur auf Ergebnisse führen, die stark von der für eine geschlossene Lösung erforderlichen Idealisierung abhängen. In diesem Fall ist die Anwendung numerischer Methoden günstiger. Die dargestellten Geometrie- und Belastungsprobleme lassen sich sehr gut mit der Methode der finiten Elemente (FEM) /133/ - /135/ bewältigen. Diese Methode wurde bereits in der Werkstoffwissenschaft von Crossman und Ashby /136/ in Zusammenhang mit Korngrenzengleiten und von Mathew und Brody /137/ für Hochtemperaturfließen angewendet. Ross /107/ hat in großem Umfang finite Elemente für die rechnerische Simulation der Sinterkinetik in Zwei- und Mehrteilchen-

systemen eingesetzt. Dabei ging es nicht um die Berechnung von Spannungen, sondern um die Modellierung des Sinterverhaltens amorpher und kristalliner Pulvermaterialien. Das Sintern amorpher Teilchen ist durch langsames viskoses Fließen beschreibbar und wurde von Ross deshalb durch einen inkompressiblen elastischen Festkörper mit einer Poissonschen Konstanten  $\nu = 0,499$  modelliert, d. h. er verwendete finite Elemente mit extrem elastischem Materialverhalten und berechnete die Verschiebungen der Knotenpunkte aus der Minimierung der potentiellen Gesamtenergie /133/. Das Sintern kristalliner Teilchen kann durch Diffusionsvorgänge, z. B. Materialtransport infolge Volumen- und Oberflächendiffusion, beschrieben werden. Ross modellierte diese Vorgänge ebenfalls mit finiten Elementen. Dabei nutzte er den Zusammenhang zwischen dem Volumenfluß  $\bar{J}_v$  und dem Gradienten des chemischen Potentials  $\nabla\mu$  /99/:

$$\bar{J}_v = - \frac{D_v}{k \cdot T \cdot \tilde{\Omega}} \cdot \nabla\mu \quad (165)$$

mit  $D_v$ : Diffusionskoeffizient,  $k$ : Boltzmann-Konstante,  
 $T$ : Temperatur,  $\tilde{\Omega}$ : Atomvolumen,  $\nabla$ : Nabla-Operator.

Die Geschwindigkeit der Materialvernichtung bzw. -konzentration wird somit über das chemische Potential erfaßt. Für dieses Potential kann ein stationäres Feldproblem /135/ analog zu Wärmeleitung - oder Strömungsmechanik-Aufgaben /138/ formuliert werden. Ebene Probleme dieser Art sind durch folgende partielle Differentialgleichung im x-y-Koordinatensystem charakterisiert:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + Q = 0 \quad (166)$$

mit  $\phi$ : skalare unbekannte Feldfunktion,  $k_x, k_y, Q$ : ortsabhängige bekannte Funktionen. Ross verwendete als physikalische Größen:  $\phi$  = chemisches Potential,  $k_x, k_y$  = anisotrope Diffusionskoeffizienten und  $Q$  = Intensität der Materialvernichtung.

Für die Anwendung finiter Elemente ist die Umformung der Differentialgleichung (166) in ein Variationsproblem erforderlich. Die zu (166) äquivalente Extremalaufgabe lautet /133/:

$$\chi = \frac{1}{2} \iint_A \left\{ k_x \cdot \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + k_y \cdot \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - 2 \cdot Q \cdot \phi \right\} dx dy \Rightarrow \text{Extr.} \quad (167)$$

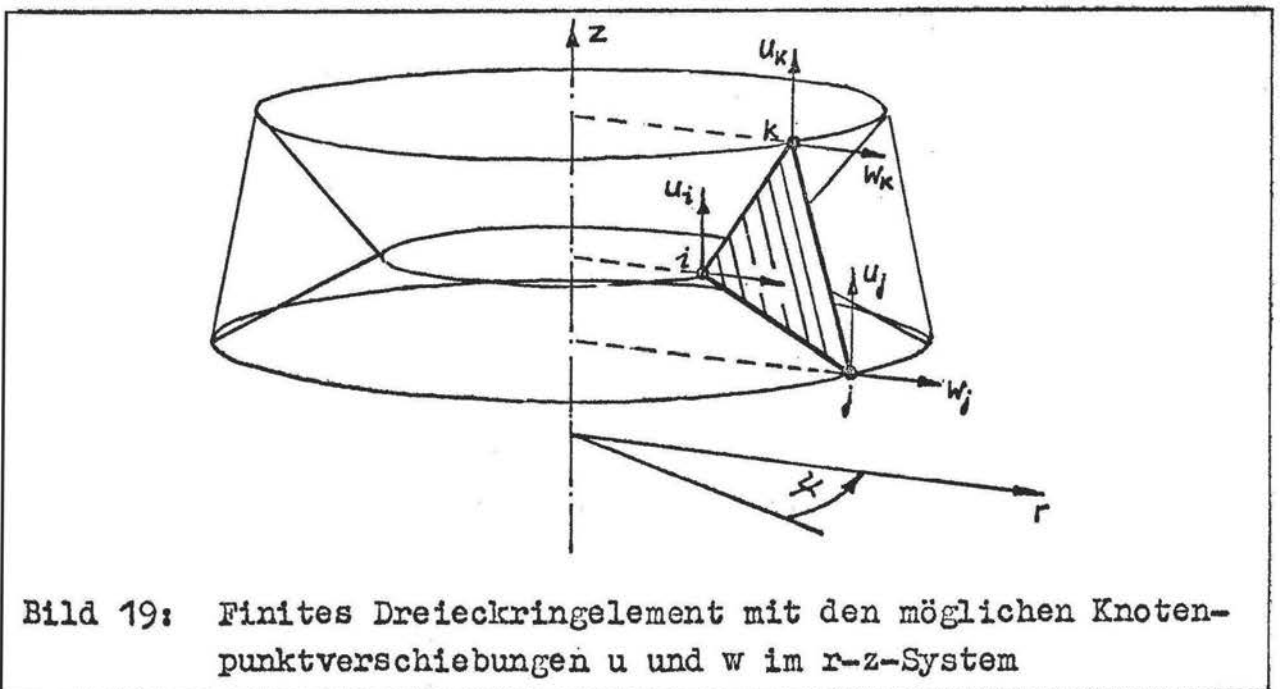
Durch Zerlegung des Gebietes  $A$  in einfache Teilgebiete und Ersetzen der Funktion  $\Phi$  in Form diskreter Knotenpunktwerte  $\Phi_i(x_i, y_i)$  erfolgt der Übergang zu finiten Elementen. Dabei entsteht ein lineares Gleichungssystem mit bandförmiger Koeffizientenmatrix. Die noch notwendigen Angaben zu den Randwerten folgen aus der Bedingung, daß sich an der Oberfläche des Sinterkörpers (Randlinie  $a_R$  des Gebietes  $A$ ) ein Gleichgewicht zwischen chemischem Potential und dem Produkt aus Atomvolumen und Laplacescher Kapillarspannung einstellt.

Im Unterschied dazu interessieren in der vorliegenden Arbeit nicht die Diffusionsvorgänge selbst, sondern die räumlichen Verteilungen einer kritischen elastischen Schubspannung im Rahmen des Frank-Read-Mechanismus. Infolge dieser Betrachtungsweise werden finite Elemente für Festkörper mit normalem elastischen Materialverhalten benötigt, d. h. mit einer Poissonschen Konstanten  $\nu = 0,33$  für Kupfer.

### 5.1. Ermittlung des elastischen Spannungstensors

#### 5.2.1. Verwendete Programme

Für die Berechnungen wurde das Algol-Programm MSP 172 /139/ (rotationssymmetrische finite Elemente) genutzt. Das Programm enthält Dreieckringelemente mit linearem Verschiebungsansatz /140/, d. h. je Ringelement sind sechs Freiheitsgrade möglich, Bild 19.





Unabhängig vom Winkel  $\varphi$  entstehen infolge der Rotationssymmetrie in jedem Axialschnitt identische Spannungszustände. Damit liegt ein quasi-ebener Spannungszustand in der r-z-Ebene vor, dessen Berechnung erheblich weniger Aufwand erfordert als für einen unsymmetrisch räumlichen Fall.

Im Unterschied zum echten ebenen Spannungszustand treten bei Rotationssymmetrie zusätzlich Verzerrungen in tangentialer Richtung auf, die aber nach Cauchy /141/ wieder aus Verschiebungen in der r-z-Ebene ermittelbar sind:

$$\epsilon_{\varphi} = \frac{u}{r} \quad (168)$$

Die Komponenten des rotationssymmetrischen Spannungstensors (164) einschließlich der aus (168) folgenden Spannung  $\sigma_{\varphi}$  werden somit durch die Verschiebungen im r-z-System vollständig bestimmt.

Die Knotenpunktverschiebungen stellen die Unbekannten des zu lösenden linearen FEM-Gleichungssystems dar. Aus ihnen wird im Programm elementweise der Verzerrungstensor  $\{\epsilon_{ik}\}$  und anschließend über das Hookesche Gesetz der Spannungstensor  $\{\sigma_{ik}\}$  in jedem Knotenpunkt (bzw. gemittelt für jedes Element) berechnet.

Für erste Beispiele wurde zunächst das FEM-Programm SCHEIBE 3 /142/ verwendet. Es zeigte sich aber, daß die große Anzahl der Knotenpunkte und Elemente, siehe Abschnitt 5.2.2., zum Überschreiten der Speicherplatzkapazität führte. Dadurch konnte nur gerechnet werden, wenn die Schnelldrucker-Anweisungen und die eigentliche Berechnung in gesonderten Schritten erfolgte. Deshalb wurde das Programm MSP 172 /139/ genutzt, das inhaltlich dem SCHEIBE 3-Programm entspricht, aber in externe Prozeduren zerlegt ist und diese über Binärstreifen einliest. Mit dem Programm MSP 172 waren alle Berechnungen problemlos möglich. Zu Ermittlung der Schubspannungen  $\tau_{uv}$  in den Gleitebenen wurde lediglich eine Korrektur für die Prozedur SPANN geschrieben, Anlage B3. Diese Prozedur liefert für jedes Element den Spannungstensor  $\{\sigma_{ik}\}$ . Entsprechend Gleichung (163) werden durch die korrigierte Prozedur für drei Winkel  $\varphi = 19, 45$  und  $35^{\circ}$  Schubspannungen  $\tau_{uv}$  berechnet und über Lochstreifen und auf dem Schnelldrucker ausgegeben.

Zur Bewältigung der großen Datenmenge bei der Netzstruktur kam das Datengenerator-Programm DATGEN 2 /143/ für ebene Geometrien

zur Anwendung, das sämtliche Knotenpunkt-Koordinaten und die Zuordnung der Knotenpunkte zu den Elementen bereitstellt. Auf die zu berechnende Fläche wird dabei ein rechteckförmiges Netz verzerrt, von dem nur ein Teil der Punkte vorgegeben werden muß. Die Vorgabe der wesentlichen Punktkoordinaten erfolgte mit Hilfe des Digitalisiergerätes "Digitron" (VEB Meß- und Zeichen- gerätebau Bad Liebenwerda). Die restlichen Punktkoordinaten wurden vom Datengenerator /143/ durch lineare Interpolation berechnet.

Zur Darstellung der FEM-Vernetzungen diente das Programm VDIG /144/. Dieses Programm stellt auf der Grundlage der DATGEN 2- Ergebnisse Steuer-Lochstreifen für den Zeichentisch "Digi- graf 2008" zum Zeichnen der Netzstrukturen her.

#### 5.2.2. Modellierung der Geometrie und Belastung

a) Zur vollständigen Beschreibung der Geometrie des Zweiteil- chenmodelles genügt die ebene Vernetzung eines Axialschnitt- Viertels, Anlage B2. Die Symmetrieachsen wurden durch Nullver- schiebungen an den auf den Achsen liegenden Knotenpunkten simu- liert. Bei der Vernetzung mußte beachtet werden, daß in der Teilchenkontaktregion stark inhomogene Spannungsfelder entstehen. Deshalb wurde speziell in der Nähe des Halsäquators sehr fein vernetzt. Dabei konnten Erfahrungen bei der Berechnung von Kerbspannungen mit finiten Elementen /146/ genutzt werden. Für genaue Ergebnisse muß die Netzeinteilung in Gebieten mit hoher Spannungskonzentration möglichst fein sein ohne zu starke Netz- verdichtung im Verhältnis zu benachbarten Gebieten /147/. Zum Sturkturinnern hin ist auf einen stetigen Übergang der einzelnen Elemente bezüglich ihrer Größe zu achten. Sprungstellen im Netz führen zu Störungen im Spannungsverlauf /148/. Die Kerbkontur sollte durch eine genügende Anzahl von Elementen möglichst exakt nachgebildet und im Kerbgrund selbst nur ein Element vor- handen sein /149/.

Unter Beachtung dieser Bedingungen wurden in Anlehnung an experi- mentelle Untersuchungen /91/, /93/ folgende vier Varianten des Zweiteilchenmodelles nach Bild 13 berechnet:

$$\frac{x}{a} = 0,04, \quad 0,08, \quad 0,12 \quad \text{und} \quad 0,16.$$



Diese vier Varianten charakterisieren jeweils den Sinterzustand nach Ablauf verschiedener Sinterzeiten. Um die Berechnung der daraus folgenden zeitabhängigen Spannungsverteilungen zu ermöglichen, wurden vier Modelle M1 bis M4 in finite Elemente zerlegt, Tabelle 3.

Tabelle 3: Berechnete Sintermodelle

Kugelradius a = 0,25 mm		E-Modul bei 1000°C: 6 · 10 <sup>5</sup> MPa /115/			Vernetzung in finite Elemente (Bandbreite: 26)		
Modell	x/a	x in μm	ρ in μm	P <sub>max</sub> in MPa	Pkt.e	Elem.	Glei- chungen
M1	0,04	10	0,1	17,028	288	506	534
M2	0,08	20	0,4	4,214	240	418	442
M3	0,12	30	0,9	1,854	216	374	396
M4	0,16	40	1,6	1,032	216	374	396

Der Halskrümmungsradius ρ folgt aus Gleichung (130) und die maximale Zugbeanspruchung P<sub>max</sub> entsteht aus (138) unter Berücksichtigung der spezifischen Oberflächenspannung γ = 1,72 N/m für Kupfer.

Für eine geschlossene Meridiankontur entsprechend Bild 13 mußte beachtet werden, daß der Kreismittelpunkt mit dem Radius a jeweils um den Betrag

$$h = a - \sqrt{(a-x) \cdot (a+x+2\rho)} \quad (169)$$

in negativer z-Richtung zu verschieben ist. Nur dann berühren sich die Kreise "a" und "ρ" exakt tangential. Gleichung (169) entsteht als quadratische Lösung aus (129). Sie lieferte zu jedem Modell M1 bis M4 verschiedene Werte für h, wie es auch für praktische Fälle typisch ist.

Wegen der extremen Radienverhältnisse a/ρ (maximal a/ρ = 2500 bei M1!) wurden für jedes Modell mehrere Gebiete gesondert in unterschiedlichen Maßstäben vernetzt und zu einem normierten Gesamtnetz zusammengefügt. Zu diesem Zweck wurde eine spezielle Programmkorrektur für den Datengenerator /143/ geschrieben. Vor allem mußte im Halskonturbereich unterschiedlich fein vernetzt werden, um die Bedingungen für die Einhaltung der Genauigkeitskriterien

zu erfüllen. Das führte zu den in der Tabelle 3 angegebenen Unterschieden in der Zahl der Knotenpunkte und Elemente. Für alle vier Modelle wurde die Kontakthals-Symmetrielinie einheitlich durch 12 Knotenpunkte realisiert, Anlage B2 unten. Im Ergebnis der FEM-Bearbeitung entsteht ein Gleichungssystem mit bandförmiger Koeffizientenmatrix, deren Bandbreite  $bb$  direkt von der Knotenpunktnumerierung abhängt, und zwar von der im Netz vorkommenden größten Knotenpunktdifferenz  $d$ :

$$bb = 2 \cdot (d + 1) \quad (170)$$

Bei Verwendung des Programmes DATGEN 2 /143/ ist vom Nutzer auf die zu berechnende Fläche ein Netz mit rechteckförmiger Gesamtkontur anzupassen. Im Fall der berechneten Beispiele M1 bis M4 wurden immer 12 Punkte in der Querrichtung beibehalten. Daraus ergab sich wegen (170) die einheitliche Bandbreite  $bb = 26$ . Die halbkreisförmige Struktur des Axialschnitt-Viertels siehe Anlage B2 Bild b, ist durch eine rechteckförmige Kontur nicht modellierbar. Deshalb wurde für alle Varianten das Netz teilweise aus dem Material herausgezogen in Form von jeweils 6 "Nullelementen", Anlage B4. Nullelemente haben auf die Festigkeitsberechnung keinen Einfluß /142/, weil für diese Elemente im Programm der Elastizitätsmodul zu Null gesetzt wird. Die im materiallosen Gebiet liegenden "Nullknoten" werden für die Berechnung durch Nullvorgabe ihrer Verschiebungen in beiden Richtungen automatisch eliminiert. Die Anzahl der in Tabelle 3 angegebenen Gleichungen entsteht aus der zweifachen Punkteanzahl minus Anzahl der Nullverschiebungen (senkrecht zu den Symmetrieachsen und Nullknoten).

Die Anlagen B4 und B5 zeigen die 4 Gesamtnetze und zugehörige, stark vergrößerte Netzausschnitte von der Umgebung des Kontakthals-Äquators. Die Modelle M1 und M3 sind dabei ohne ihre Nullelemente dargestellt.

b) Für die Belastung wurde der senkrecht zur Oberfläche wirkende Laplace-Druck verwendet. Im Ergebnis der bereits zitierten Computer-Simulationen für die Hinterschneidungen /104/ - /107/ entstehen je nach Vorgabe eines konkreten Materialtransport-Mechanismus verschiedene Oberflächenkonturen. Im Realfall wirken

aber stets mehrere Mechanismen gleichzeitig, so daß eine analytische Beschreibung der ohnehin numerisch formulierten Konturen nur durch weitere Idealisierungen möglich wäre. Um die Wirkung der Hinterschneidung auf die Laplace-Spannung zu simulieren, wurde deshalb hier für die Belastungsverteilung der Modelle M1 bis M4 die einheitliche Annahme getroffen, daß die Zugspannung  $p_{\max}$  stetig auf die Druckspannung  $p_a$  in einem Bereich abklingt, der dem vierfachen Halskrümmungsradius des Modelles M4 entspricht.

Für die Eingabe in das Programm MSP 172 mußte die Laplacesche Flächenlast  $p_L$  in Knotenkräfte umgerechnet werden. Zu diesem Zweck wurden zunächst jedem Knotenpunkt  $i$  der zugbelasteten FEM-Randkontur Laplacesche Spannungen  $p_i$  zugeordnet, Bild 20. Jede Länge  $l_j$  zwischen den zwei Randknotenpunkten  $i$  und  $i + 12$  (siehe Anlage B2 unten) entspricht einer Kegelstumpf-Mantelfläche  $A_j$  /37/:

$$A_j = \pi \cdot l_j \cdot (r_i + r_{i+12}) \quad (171)$$

mit  $r_i, r_{i+12}$ : Radialkoordinaten

Die auf dieser Fläche angreifende Kraft lautet:

$$F_j = F_{i, i+12} = \frac{1}{2} \cdot (p_i + p_{i+12}) \cdot A_j \quad (172)$$

Die Kräfte  $F_j$  wurden zu gleichen Teilen auf die benachbarten Knotenpunkte verteilt. Abschließend erfolgte die Zerlegung der so berechneten Knotenpunkt-Einzelkräfte  $F_i$  in ihre Radial- und Axialkomponenten.

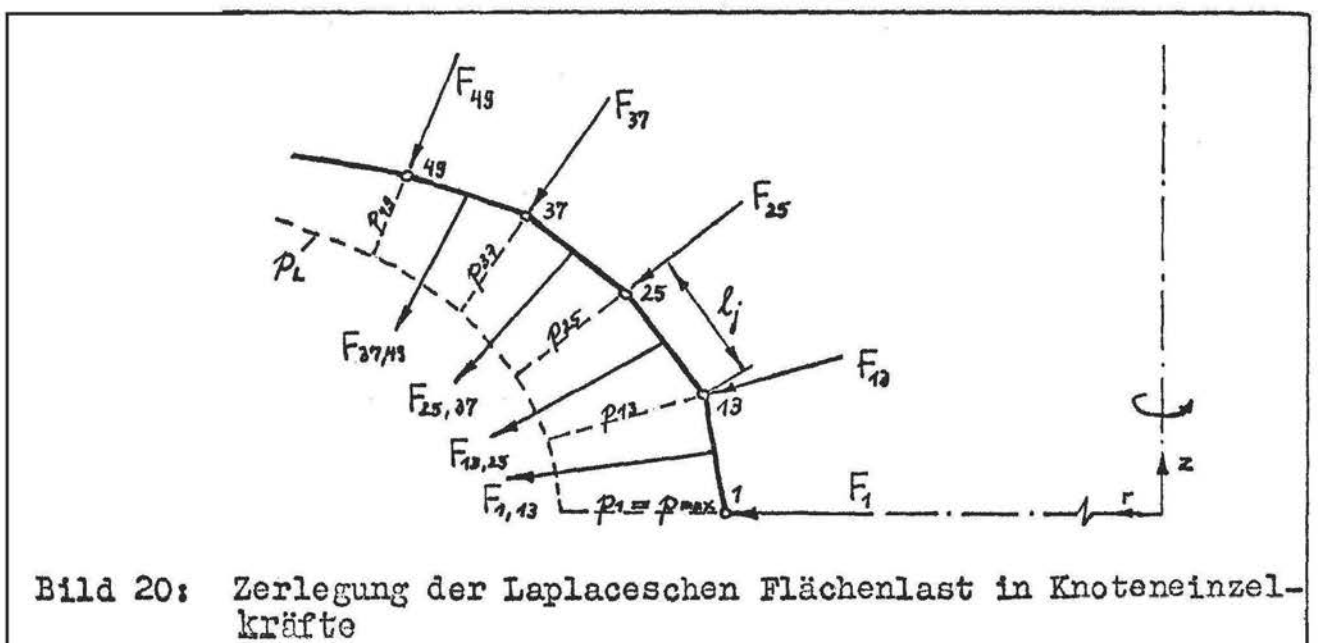


Bild 20: Zerlegung der Laplaceschen Flächenlast in Knoteneinzelkräfte

### 5.3. Ergebnisse der Berechnung

#### 5.3.1. Schubspannungen $\tau_{uv}$ für verschiedene Winkel

Anlage B6 zeigt den Verlauf berechneter Normalspannungskomponenten  $\sigma_r$  und  $\sigma_z$  in der Kontakthalsebene  $z = 0$  sowie die Verteilung der Schubspannung  $\tau_{uv}$  in der r-z-Ebene. Es handelt sich um das Modell M2 mit  $x/a = 0,08$  für einen Winkel  $\varphi = \psi = 45^\circ$ . Die gleiche Verteilung ist in Anlage B7 dreidimensional dargestellt. Mit diesem Bild wird deutlich, daß in der Umgebung des Sinterhalses hohe Schubspannungen  $\tau_{uv}$  vorhanden sind, die in Richtung zur Rotationsachse z nichtlinear abklingen und dabei ein ständig größer werdendes Volumen erfassen. Ebenfalls in Anlage B7 sind die Verläufe dieser Schubspannungen in der Kontakthalsebene für drei ausgewählte Gleitebenenwinkel  $\varphi$  und für die vier Varianten M1 bis M4 enthalten. Der Winkel  $\varphi = \psi = 45^\circ$  repräsentiert die hinsichtlich der Spannungshöhe theoretisch günstigste Gleitebenenlage, während  $\varphi = 19^\circ$  den vorwiegend experimentell angewandten Bedingungen an Kugel-Platte-Modellen entspricht, für die die Plattenoberfläche bzw. die Kontakthalsebene einer Gleitebene parallel liegt und andere Gleitebenen zu dieser den Winkel  $\psi = 71^\circ$  bilden /150/. Der Winkel  $\varphi = 35^\circ$  bzw.  $\psi = 55^\circ$  entsteht aus der Neigung einer Gleitebene zur Brandungsfläche der kubisch flächenzentrierten Elementarzelle.

#### 5.3.2. Aktivierbare Volumina

Durch die korrigierte Prozedur SPANN, Anlage B3, wird für jedes Element die Ausgabe der Schubspannungen  $\tau_{uv}$  für die drei Winkel  $\varphi = 19^\circ$ ,  $35^\circ$  und  $45^\circ$  auf Lochstreifen veranlaßt. Zur Ermittlung der Gebiete, in denen die Bedingung

$$\tau_{uv}(r, z) \geq \tau_{\text{Krit}}$$

erfüllt ist, wurde das Grafik-Programm VDIG /144/ in veränderter Form genutzt. Das entsprechend korrigierte VDIG-Programm verwendet die  $\tau_{uv}$ -Lochstreifen als zusätzliche Eingabe-Datenträger. Im Programm wird für jedes Element getestet, ob der vorgegebene Wert  $\tau_{\text{Krit}}$  durch den berechneten  $\tau_{uv}$ -Wert überschritten wird. Ist das der Fall, so erfolgt das Zeichnen dieses Elementes - ansonsten wird es in der Zeichenroutine übersprungen. Damit war



es auf einfache Weise möglich, die FEM-Berechnung im Sinne des Frank-Read-Mechanismus auszuwerten, Bild 21.

Anlage B8 zeigt verschiedene aktivierbare Gebiete des Modelles M2, die auf diese Weise ermittelt wurden. Es handelt sich dabei um drei vorgegebene kritische Schubspannungen  $\tau_{\text{Krit}} = 0,25, 0,50$  und  $1,0$  MPa.

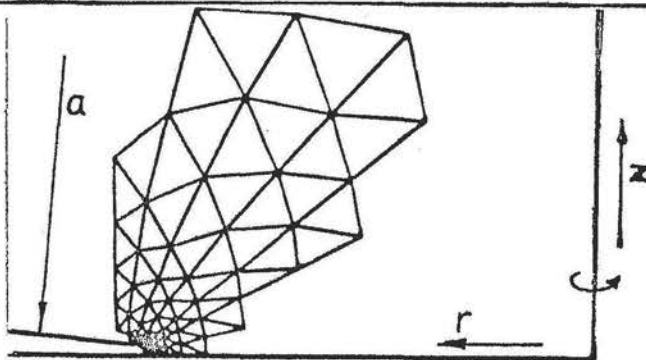


Bild 21: Beispiel zur grafischen Auswertung der Gebiete mit  $\tau_{uv}(r, z) \geq \tau_{\text{Krit}}$

Die im Abschnitt 3.1. erläuterte Versetzungsvervielfachung kann nur entstehen, wenn das aktivierbare Volumen (die räumliche Ausdehnung des Gebietes mit  $\tau_{uv} \geq \tau_{\text{Krit}}$ ) mindestens Längenausdehnungen  $l$  in der  $r$ - $z$ -Ebene von  $l = l(N) = 1/\sqrt{N} = 10 \mu\text{m}$

besitzt. Die  $x/a$ -Abhängigkeit bzw. die zeitliche Veränderung der aktivierbaren Volumina für  $\tau_{\text{Krit}} = 0,25$  MPa nach Gleichung (156) und drei Gleitebenenwinkel ist in Bild 22 dargestellt.

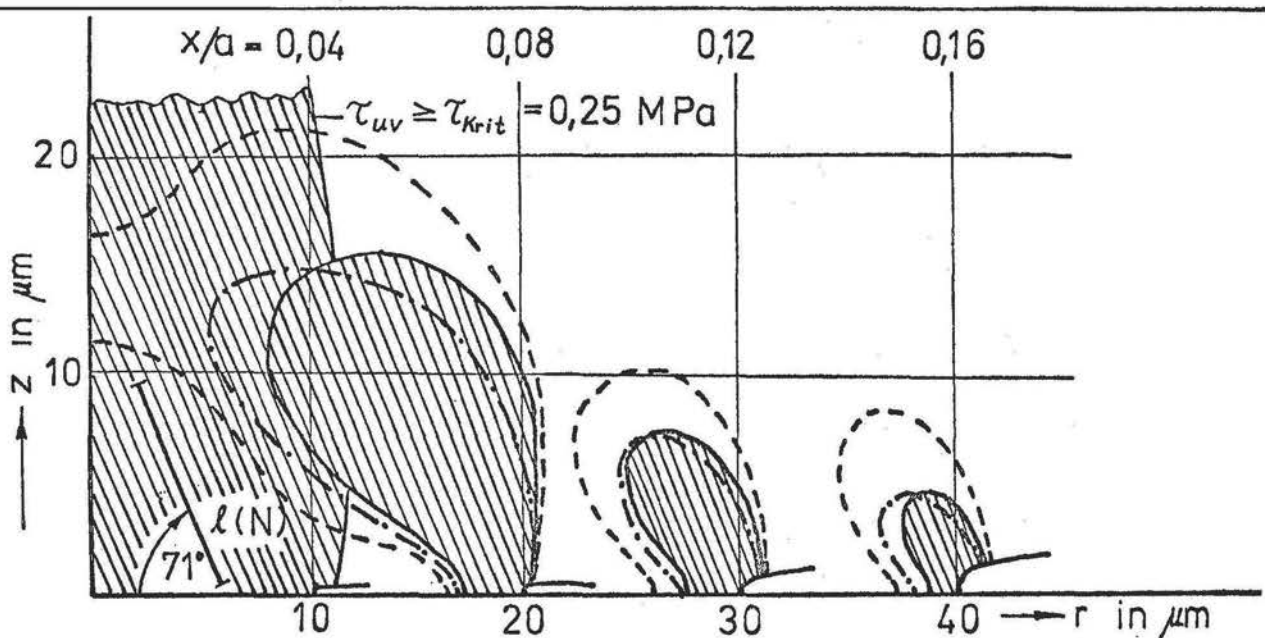


Bild 22: Berechnete Querschnitte der aktivierbaren Volumina in der  $r$ - $z$ -Ebene d. Sinterhalszonen f. verschiedene  $x/a$ -Werte bei  $\psi = 71^\circ$  (—),  $55^\circ$  (---) und  $45^\circ$  (---)

Zu Sinterbeginn (hier repräsentiert durch  $x/a = 0,04$ : Modell M1) liegt demnach ein geschlossenes aktivierbares Volumen im gesamten Sinterkontaktbereich vor. Dabei wird die Versetzungsquellenlänge  $l$  beträchtlich übertroffen. Mit wachsendem Kontakthalsdurchmesser verlagert sich das aktivierbare Volumen als eine ringwulstförmige Zone, der Halsoberfläche folgend, in Richtung zur Kontaktperipherie. Dabei nimmt seine Ausdehnung mit fortschreitender Sinterzeit stetig ab, so daß die Mindestlänge  $l$  nicht mehr erreicht wird und damit die "Selbstaktivierung" zum Stillstand kommt.

### 5.3.3. Vergleich mit gemessenen Versetzungsdichteverteilungen

Die berechneten Ergebnisse für Zweikugel-Sintermodelle korrelieren sehr gut mit experimentell ermittelten Versetzungsdichteverteilungen im Kontaktbereich monokristalliner Kugel-Platte-Sinterpartikeln /118/, /120/, /93/, Anlage B9. Die Maxima der Versetzungsdichte wandern mit zunehmender Sinterdauer als ringförmige Erhebungen nach außen, ähnlich den berechneten aktivierbaren Volumina. Mit fortschreitendem Kontaktwachstum wird auch der Halskrümmungsradius  $\rho$  größer. Demzufolge verringert sich insgesamt die Schubspannung  $\tau_{uv}(p_L)$ . Außerdem ist mit der Erhöhung der Versetzungsdichte in der Kontaktregion ein Ansteigen von  $\tau_{Krit.}$  gemäß Gleichung (156) verbunden. Schließlich wird ein Zustand erreicht, bei dem in der Umgebung der Rotationsachse  $\tau_{uv} < \tau_{Krit.}$  gilt und damit die Neubildung von Versetzungen in dieser Zone aufhört. Die Versetzungsmultiplikation erstreckt sich jetzt nur noch auf ein peripheres Volumen, dessen Ausdehnung durch die Reichweite der aktivierbaren Volumina bestimmt wird. Im Zentrum des Kontakthalses sind inzwischen Erholungsvorgänge wirksam, die das N-Maximum in der Rotationsachse abbauen (Versetzungsdichte für  $x/a = 0,08 \dots 0,12$  in Anlage B9), aber infolge ihrer Trägheit vorerst nur ein relatives Absinken dieses Maximums verursachen. Die gemessenen N-Verteilungen zeigen, daß die Versetzungsmultiplikationen ebenso wie die berechneten aktivierbaren Volumina während eines beträchtlichen Zeitanteiles des gesamten Sintervorganges existieren.



## 6. Zusammenfassung

In Abhängigkeit ausgewählter Sinterparameter wurde die von den Kapillarkräften verursachte räumliche Spannungsverteilung in Zweikugel-Sintermodellen numerisch berechnet. Dabei konnte die Rotations- und Teilchensymmetrie genutzt werden.

Aus dem Spannungstensor wurde vorher analytisch eine Schubspannungskomponente  $\tau_{uv}$  abgeleitet, die innerhalb der Teilchen auf rotationssymmetrischen Kegelmantelflächen wirksam ist. Diese inneren Flächen repräsentieren mögliche idealisierte Gleitebenen der kristallinen Materialstruktur. Als theoretischer Versetzungsmultiplikations-Mechanismus wurde die Frank-Read-Quelle angenommen, bei der die Schubspannungen in den Gleitebenen eine bestimmte Quellenspannung überschreiten müssen, um Versetzungen zu erzeugen. Ebenso geeignet als Mechanismus wäre auch das Versetzungsklettern nach Bardeen-Herring /150/ oder die Emission von Gitterversetzungen aus der Kontaktkorngrenze /151/. Jedoch setzen auch diese Mechanismen eine bestimmte Höhe und Reichweite der Kapillarspannungen voraus, so daß sich damit keine wesentlich anderen Verhältnisse bezüglich einer Selbstaktivierung im Sinter-Kontaktbereich ergeben /117/.

Die Versetzungserzeugung nach dem Frank-Read-Mechanismus ist nicht allein vom Überschreiten der Quellenspannung abhängig, sondern auch davon, daß diese Spannung in einem Gebiet mit bestimmter Mindestlänge in Gleitebenenrichtung von  $\tau_{uv}$  überschritten wird. Die Berechnung dieser Gebiete (aktivierbare Volumina) erforderte bei der Anwendung eines herkömmlichen FEM-Programmsystems zur Berechnung elastischer rotationssymmetrischer Festkörper einige Programmkorrekturen. Das betraf eine Prozedur für die Berechnung des Spannungstensors, Anlage B3, sowie ein Grafikprogramm zum Zeichnen der FEM-Vernetzungen.

Durch die gute Übereinstimmung der experimentellen und rechnerischen Resultate zur Versetzungsvervielfachung und Schubspannungsverteilung in der Sinterkontaktregion, Anlage B9, wurden die wesentlichen Aussagen der Selbstaktivierungstheorie bestätigt. Infolge des nachgewiesenen Zusammenhanges zwischen den berechneten aktivierbaren Volumina und den gemessenen Versetzungsdichte-Verteilungen sind mehrere Schlußfolgerungen möglich:

a) Für die Reichweite der aktivierbaren Volumina ist die Höhe der Quellen-Spannung  $\tau_Q = \tau_{\text{Krit}}$  von großer Bedeutung. Diese Spannung kann zum Beispiel schon durch geringe Verunreinigungen oder Legierungsanteile angehoben werden. Wenn dadurch zu Beginn des Sinterns die Bedingung  $\tau_{uv}(r, z) \geq \tau_{\text{Krit}}$  nicht für den gesamten Kontaktquerschnitt erfüllt ist, so entstehen nur ringförmige Versetzungszonen /91/. Gemäß Gleichung (156) ist die Bildung aktivierbarer Volumina bei größerer Quellenspannung an die Erhöhung der Ausgangsversetzungsdichte und damit an eine Verringerung der Quellenlänge  $l_s$  gebunden. Damit entsteht zwar eine große Anzahl von Quellen, d. h. eine sehr hohe Versetzungsdichte, diese existiert aber in einem immer geringer werdenden Volumen. Daraus folgt eine mit steigender Ausgangsversetzungsdichte abnehmende Selbstaktivierbarkeit. (Die FEM-Berechnungen wurden nur für konstant bleibende Quellenspannungen, also für konstante Ausgangsversetzungsdichte, durchgeführt).

b) Die Aktivierbarkeit wird auch von der Teilchengröße beeinflusst, weil die Schubspannung  $\tau_{uv}$  als Funktion des Laplace-Druckes  $p_L$  unter anderem vom Teilchenradius  $a$  abhängt, siehe Gleichung (138) und (130). Bei konstantem Halsradius  $x$  wird  $\tau_{uv}$  proportional zu  $a$  kleiner und damit das aktivierbare Volumen. Dieser Sachverhalt äußert sich in einem mit dem Teilchenradius abnehmenden effektiven Diffusionskoeffizienten  $D_{\text{eff}}$ , Gleichung (157), der die im Kontaktbereich entstandene mittlere Versetzungsdichte  $\bar{N}$  charakterisiert /92/. Je niedriger die Ausgangsversetzungsdichte ist, umso mehr wird durch kleinere Pulverteilchen die Versetzungsvervielfachung eingeschränkt. Damit ist auch verständlich, weshalb bei Untersuchungen an sehr kleinen Sinterpartikeln keine Versetzungsbildung beobachtet wurde /125/.

c) Die kristallografische Orientierung der Sinterpartner hat ebenfalls Einfluß auf die Selbstaktivierung. Wie die FEM-Berechnungen zeigen, ist die Ausdehnung der aktivierbaren Volumina vom Winkel  $\nu$  zwischen Halskontakt- und Gleitebene abhängig. Die Gebiete mit  $\tau_{uv} \geq \tau_{\text{Krit}}$  sind für  $\nu = 45^\circ$  deutlich größer als für  $\nu \neq 45^\circ$ . Im allgemeinen nehmen die Gleitebenen in den Sinterpartnern eine zur Kontaktebene unterschiedliche Lage ein; das führt auf unterschiedlich intensive Versetzungsvervielfachung /93/ /118/ beiderseits dieser Ebene.

d) Die Selbstaktivierung ist von der Temperatur abhängig. Bei hoher Sintertemperatur verringert sich die kritische Schubspannung nach Gleichung (156) infolge des mit der Temperatur abnehmenden Gleitmoduls, so daß die aktivierbaren Volumina größer werden.

Diese für freiwilliges Sintern abgeleiteten Schlußfolgerungen sind auch auf gepreßte Pulverteilchen anwendbar /117/. So entstehen innerhalb realer Preßlinge zahlreiche rißartige Poren mit sehr kleinen Krümmungsradien. Um diese Poren bilden sich schmale Zonen mit hohen Versetzungsdichten /94/, die den technischen Preßkontakt ausfüllen und dabei intensiv sinterfördernd wirken.

7. Wesentliche Formelzeichen im Teil II

A	Fläche
a	Teilchenradius
b	Betrag des Burgers-Vektors
G	Gleitmodul
h	halbe Zentrumsannäherung
K	Boltzmannsche Konstante = $1,38 \cdot 10^{-23}$ Ws/grad
l	mittlerer Versetzungsabstand
N	Versetzungsdichte (in Anzahl/cm <sup>2</sup> )
p	Druck
r, z, $\varphi$	Zylinderkoordinaten
T	Temperatur
t	Zeit
u, v,	kartesische Koordinaten
V	Volumen
W	Energie
x	Halsradius
$\gamma$	spezifische Oberflächenspannung (in N/m)
$\{\epsilon_{ik}\}$	Verzerrungstensor
$\vartheta, \varphi$	Winkel in der r.z.Ebene
$\nu$	Querkontraktionszahl
$\rho$	Halskrümmungsradius
$\sigma$	Normalspannung
$\{\sigma_{ik}\}$	Spannungstensor
$\tau$	Schubspannung
$\Omega, \bar{\Omega}$	Leerstellen- bzw. Atomvolumen

Literaturverzeichnis

- /1/ Runge, G.: Über die Zerlegung empirisch gegebener periodischer Funktionen in Sinuswellen. Z. f. Mathematik und Physik 48 (1903), S. 443 - 456
- /2/ Ritz, W.: Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. J. Reine und Angew. Math., 135, 1-61, (1909)
- /3/ Turner, M.J., Clough, R.W., Martin, H.C., Topp, L.J.: Stiffness and deflection analysis of complex structures. Journ. Aeronaut. Sci. 23 (1956), S. 805 - 823
- /4/ Cooley-Tukey: An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. Mathematics of Computation 19 (1965), S. 297 - 301
- /5/ Lange, F.; Pfeiffer, F.: Erläuterungen zur Neufassung des DDR-Standards TGL 33787/81. IfL-Mitt., Dresden 23 (1984) 1, S. 1 - 13
- /6/ Fischer, R., Haibach, E.: Simulation von Beanspruchungs-Zeit-Funktionen in Versuchen zur Beurteilung von Werkstoffen. In: Verhalten von Stahl bei schwingender Beanspruchung. Schenck-Druckschrift P 5941, Düsseldorf 1979
- /7/ Paasch, F.: Die Systematisierung von Beanspruchungsarten und -aufzeichnungen. Der Maschinenbau 18 (1969) 11, S. 494 - 500
- /8/ Heinrich, W., Hennig, K.: Zufallsschwingungen mechanischer Systeme. Akademieverlag Berlin 1977
- /9/ Braun, H.: Untersuchung von Fahrbahnunebenheiten und Anwendung der Ergebnisse. Diss. TU Braunschweig 1969
- /10/ Buxbaum, O.: Beschreibung einer im Fahrbetrieb gemessenen Beanspruchungs-Zeit-Funktion mit Hilfe der spektralen Leistungsdichte, LBF-Bericht Nr. TB-102, Darmstadt 1972
- /11/ Voy, Ch.: Die Simulation vertikaler Fahrzeugschwingungen. VDI-Z., Fortschrittbericht Reihe 12, Nr. 30 (1977)

- /12/ Buxbaum, O., Svenson, O.: Zur Beschreibung von Betriebsbeanspruchungen mit Hilfe statistischer Kenngrößen - dargestellt am Beispiel von Kraftfahrzeugteilen. ATZ 75 (1973) 6, S. 208 - 215
- /13/ Kowalewski, J.: Beschreibung regelloser Vorgänge. In: Lebensdaueranalyse bei unregelmäßig schwankender Belastung. VDI-Z., Fortschritt-Bericht, Reihe 5, Nr. 7, 1969
- /14/ Rice, S.D.: Mathematical analysis of random noise. Bell System Techn. Journal Vol. 23 - 24. In: Noise and stochastic processes, Editor N. Max, Dover publications, New York 1954
- /15/ Kowalewski, J.: Über die Beziehungen zwischen der Lebensdauer von Bauteilen bei unregelmäßig schwankenden und bei geordneten Belastungsfolgen. DVL-Bericht Nr. 249, Porz-Wahn 1963
- /16/ Sjöström, S.: On Random Load Analysis. Transactions of the Royal Institute of Technology, Nr. 181, Stockholm 1961
- /17/ Hänel, B., Weygandt, W.: Erzeugung regelloser Beanspruchungsverläufe für die Festigkeitsprüfung mittels Prozeßrechner und elektro-servohydraulischer Prüftechnik. IfL-Mitt. 19 (1980) 5, S. 172 - 184
- /18/ Miles, J.W.: On Structural Fatigue Under Random Loading. Journ. Aeronaut. Sci. 21 (1954) 11, S. 753 - 762
- /19/ Corten, H.T., Dolan, T.J.: Cumulative Fatigue Damage. Proc. of the Internat. Conference of Fatigue of Metals, London 1956, S. 235 - 246
- /20/ Palmgren, A.: Die Lebensdauer von Kugellagern. VDI-Z. 69 (1924), S. 339 - 341
- /21/ Miner, M.A.: Cumulative Damage in Fatigue. Journal of Applied Mechanics 1945, S. A 159 - A 164
- /22/ Bolotin, V.V.: Njekotorije obobčenijske teorije summirowanija ustalostnich powrešdenij ... Maschinostrojenije. Nr. 8, Moskva 1959 .



- /23/ Bolotin, V.V.: Wahrscheinlichkeitsmethoden zur Berechnung von Konstruktionen. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1981
- /24/ Wirsching, P.H., Haugen, E.B.: Probabilistic design for random fatigue loads. J. of the Eng. Mechanics Div. Dez. 1973 (zitiert in /25/)
- /25/ Refaad El Sayed: Beitrag zum Berechnungsverfahren von Wirsching und Haugen sowie eine neue Schadensakkumulations-Hypothese ...  
VDI-Fortschritt-Bericht, Reihe 5, Nr. 61, Düsseldorf 1982
- /26/ Rajcher, V.L.: Gipotesa spektralnogo summirovania i jejo primenie dla opredelenia ustalostnoj dolgo večnosti pri dejstvii slučajnych nagruzok. Trudy GAGI 1134 Moskva 1969
- /27/ Kermes, J., Proskovec, J., Vojtisek, J.: Životnost oceli pri simulaci provozniho namáhání. Vortrag zur Tagung "Unava materiálu a konstrukci" (Veranstalter: ŠKODA Plzeň, SVÚM Prag u.a.) Prag 1984, S. 223- 229
- /28/ Bolotin, V.V.: Ob ocenke resursa konstrukcij pri dejstvii slučajnych nagruzok. In: Rasčety na procnost'. Sbornik statej, vypusk 9, Mašgiz, Moskva 1963, S. 302 - 326  
(Zitiert in /29/)
- /29/ Hänel, B.: Dimensionierung nach der Spektraldichte. IfL-Bericht Nr. 530 - 31/75, Dresden 1975
- /30/ Hänel, B.: Betriebsfestigkeitsnachweis auf der Grundlage der Spektraldichte des regellosen Beanspruchungsprozesses. IfL-Mitt. 15, Dresden 1976, 7/8, S. 252 - 260
- /31/ Hänel, B.: Spektraldichte und Kollektiv. IfL-Mitt. 14 (1975) 1/2, S. 42 - 49
- /32/ Stüssi, F.: Die Theorie der Dauerfestigkeit und die Versuche von August Wöhler. Mitt. der TKVSB, Nr. 13, Zürich 1955.
- /33/ Wirthgen, G.: Rechnerische Ermittlung von Lebensdauerlinien einfacher gekerbter Bauteile ... IfL-Bericht 6 - 108/65, Dresden 1965
- /34/ Lammel, E.: Phänomenologische Theorie der Wöhlerlinie. IfL-Mitt. 8 (1968) 6, S. 228 - 232

- /35/ Günther, W. u.a.: Schwingfestigkeit. VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1. Auflage, Leipzig 1973
- /36/ Haibach, E.: Modifizierte Schadensakkumulationshypothese zur Berücksichtigung des Dauerfestigkeitsabfalls mit fortschreitender Schädigung. Techn. Mitt. LBF, Nr. 50/70, Darmstadt 1970
- /37/ Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A.: Taschenbuch der Mathematik, BSB G.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 12. Auflage, Leipzig 1973
- /38/ Kremer, H.: Praktische Berechnung des Spektrums mit der schnellen Fourier-Transformation. Elektron. Datenverarb. (1969) 6, S. 281 - 284
- /39/ Weber, K.D.: Numerische Analyse und Synthese argumentquantisierter Funktionen mit der schnellen Fourier-Transformation. Nachrichtentechnik 21 (1971) 2, S. 45 - 50
- /40/ Gurtler, J., Reichert, D.: Verfahren und Rechenprogramm zur maschinellen F-Transformation reeller Zeitfunktionen. Nachrichtentechnik 21 (1971), S. 142 - 146 und S. 229 - 233
- /41/ Weber, K.D.: Die redundanzfreie schnelle Fourier-Transformation. Nachrichtentechnik 21 (1971) 9, S. 305 - 308
- /42/ Beer, H.J., Hardtke, H.J., Richter, F.: Programmsystem zur experimentellen Bestimmung dynamischer Systemkennwerte. Maschinenbautechnik 27 (1978) 3, S. 103 - 105
- /43/ Lingener, A., Wahl, F.: Einsatz von Klein- und Prozeßrechnern bei der experimentellen Untersuchung stochastischer Schwingungen ... Techn. Mechanik 1 (1980) 1, S. 21 - 26
- /44/ Hähnsch, A.: Programmsystem zur Analyse stochastischer Prozesse. Kraftfahrzeugtechnik (1982) 8, S. 244 - 247
- /45/ Böhme, K.H.: Digitale Auswertung regelloser Beanspruchungsfunktionen im Zeit- und Frequenzbereich für die Zwecke der Ermüdungsfestigkeit. IfL-Bericht Nr. 600 - 11/83, Dresden 1983
- /46/ Joensson, D.: Programmbeschreibungen EPRO 1 und 3 (Digitale Signalanalyse mit FFT), Rechner: General Automation SPC 16/65, Betriebssystem DBOS, TU Dresden, Sektion 13, Forschungsgruppe Betriebsfestigkeit 1983

- /47/ Hagenauer, J.: Fehler beim Abtasten und Wiederherstellen bandbegrenzter Signale. Diss. TH Darmstadt 1974
- /48/ Thrane, N.: The diskrete fourier transform and FFT analysers. In: Digital Signal Analysis. Selected Reprints from Technical, Review, Brüel and Kjaer, Naerum 1981
- /49/ Achilles, D.: Die Fourier-Transformation in der Signalverarbeitung. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1978
- /50/ Le Huy Thao: Beiträge zur digitalen Meßwertverarbeitung. Diplomarbeit TU Dresden, Sektion 13, Forschungsgruppe Dynamik 1981
- /51/ Schmidt, G.: Möglichkeiten zur Erhöhung der Genauigkeit bei der digitalen Spektralanalyse im Maschinenbau unter Verwendung des Hybridrechners .... Diss. TH Magdeburg 1979
- /52/ Joensson, D.: Programmbeschreibungen SLEBE 1 und 2 (Spektralanalytische Lebensdauerberechnung mit FFT) Rechner siehe /46/, 1984/85
- /53/ - FFTA 40 (Unterprogramme zur Fourieranalyse), Bedienungsanleitung PE 6.502, Carl Schenck AG Darmstadt 1979
- /54/ Schlag, K., Joensson, D.: Programmbeschreibung SINUSK (Digitale Erzeugung einer periodischen Funktion) Rechner siehe /46/, 1984
- /55/ Pfeiffer, F.: Einfluß der Mittelspannung auf die Schwingfestigkeit von Bauteilen. IfL-Mitt. 16 (1977) 3, S. 82 - 89
- /56/ Joensson, D.: Programmbeschreibung PEXTF (Digitale Erzeugung einer periodischen Extremwertfolge) Rechner siehe /46/, 1984
- /57/ Joensson, D.: Programmbeschreibung EMOA (Extremwertfolge mit Momentanwerten auffüllen) Rechner siehe /46/, 1984
- /58/ Lange, D.: Lebensdauerbestimmung für regellos beanspruchte Bauteile auf der Grundlage stochastischer Kenngrößen. Diss. TU Dresden 1983
- /59/ Lange, D.: Einfluß stochastischer Kenngrößen auf die Lebensdauer regellos beanspruchter Probestäbe. IfL-Mitt. 23 (1984) 1, S. 14 - 17

- /60/ Lingener, A.: Experimentelle Analyse stochastischer Vorgänge mit Anwendungen auf Probleme des Maschinenbaues (Spektrenkatalog), TH Magdeburg, Sektion Maschinenbau 1980
- /61/ - FMR 200 (Hydropuls-Hauptprogramm), Bedienungsanleitung PE 6.200, Carl Schenck AG Darmstadt 1975
- /62/ Lange, F.: Weiterentwicklung experimenteller Methoden der Schwingfestigkeits- und Zuverlässigkeitsforschung. IfL-Bericht Nr. 600-18/82, Dresden 1982
- /63/ Wirthgen, G.: Einfluß veränderlicher Mittelspannungen auf die Betriebsdauer von Bauteilen. IfL-Bericht Nr. 530-19/71, Dresden 1971
- /64/ Weygandt, W., Wirthgen, G.: Einfluß veränderlicher Mittelspannungen auf die Betriebsdauer. IfL-Bericht Nr. 600-32/71, Dresden 1971
- /65/ Joensson, D.: Beitrag zum Einfluß des elastischen Spannungszustandes auf die Schwingfestigkeit. Diss. TU Dresden 1981
- /66/ Luber, H.: Experimentelle Untersuchungen zum Einfluß stochastischer Schwingbeanspruchungen auf die Lebensdauer von Bauteilen. Diss. TU Dresden 1984
- /67/ - GAUS 2 $\emptyset$  (Gauß-Zufallsfolge) Bedienungsanleitung PE 6.237, Carl Schenck AG, Darmstadt 1979
- /68/ - DISK 4 $\emptyset$  / TAPE 4 $\emptyset$  (Datentransfer auf Massenspeicher und Datenverarbeitung im FMR-Hintergrund-Betrieb) Bedienungsanleitung PE 6.41 $\emptyset$ , Carl Schenck AG, Darmstadt 1981
- /69/ Joensson, D.: Programmbeschreibung KME 40 (Klassierung von Maxima und Minima in 40 Klassen) Rechner siehe /46/, 1984
- /70/ Rossow, E.: Grundlagen der Beurteilung von Meßwerten. Materialprüfung 6 (1964), S. 370 - 376
- /71/ Schubert, W.: Programmbeschreibung EREG (Ebene lineare Regression) Rechner siehe /46/, 1985

- /72/ Prochnow, H., Mogwitz, H.: Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik für die Betriebsfestigkeit. Lehrbrief für das Hochschulfernstudium, VEB Verlag Technik Berlin 1975
- /73/ Joensson, D.: Programmpaket DATM (Datentransfer Magnetplatte - Kernspeicher) Rechner siehe /46/, 1984
- /74/ Joensson, D.: Programmbeschreibung VNETZ1 (Versuchsauswertung kleiner Stichproben im Wahrscheinlichkeitsnetz) Rechner siehe /46/, 1982
- /75/ - Extended Fortran reference manual (Doc.Nr. 88A 00470A-C) und: Extended Fortran subroutine Library (Nr. 499), General Automation series - 16, Anaheim 1978
- /76/ Portnoff, M.R.: Implementation of the digital phase vocoder using the fast Fourier transform. IEEE Trans. on Acoust. speech. Signal Processing (ASSP) 24 (1976) S. 243 - 246
- /77/ Allen, J.B.: Short term spectral analysis, synthesis and modification by discrete Fourier transform. IEEE Trans. on ASSP 25 (1977), S. 235 - 238
- /78/ Rabiner, L.R., Allen, J.B.: On the implementation of a short-time spectral analysis method for system identification. IEEE Trans. on ASSP 28 (1980), S. 69 - 78
- /79/ Le Huy Thao: Spektralschätzung und Identifikation mechanischer Systeme mittels Kurz-Zeit-Fourier-Analyse. Diss. TU Dresden 1985
- /80/ Hardtke, H.J.: Fourieranalyse mit gleitendem Fenster und ihre Anwendung in der Maschinendynamik. Beitrag I in: Berichte zur 6. Tagung Festkörpermechanik (Dynamik und Getriebetechnik) Dresden 1985, VEB Fachbuchverlag Leipzig 1985
- /81/ Mogwitz, H.: Zur Neuausgabe des DDR-Standards TGL 19336..., Teil 1: Grundlagen und Inhaltsübersicht. IfL-Mitt. 23 (1984), S. 172 - 180



- /82/ Schütz, W., Zenner, H.: Schadensakkumulationshypothesen zur Lebensdauer vorhersage bei schwingender Beanspruchung - ein kritischer Überblick, Z. f. Werkstofftechnik 4 (1973) S. 25 - 33 und S. 97 - 102
- /83/ Schütz, W.: Lebensdauerberechnung bei Beanspruchungen mit beliebigen Last-Zeit-Funktionen. In: VDI-Bericht Nr. 268 (1976), S. 113 - 138
- /84/ Buxbaum, O.: Vorträge des 4. LBF-Kolloquiums 1984 in Darmstadt. Begrüßung und Einführung. In: LBF-Bericht Nr. TB - 171 (1984), S. 5 - 17
- /85/ Schütz, D., Oppermann, H.: Kritische Bewertung von rechnerischen Verfahren zur Lebensdauer vorhersage. In: LBF-Bericht Nr. TB - 171 (1984), S. 19 - 56
- /86/ Buxbaum, O., Oppermann, H.u.a.: Vergleich der Lebensdauer vorhersage nach dem Kerbgrundkonzept und dem Nennspannungskonzept. LBF-Bericht Nr. FB - 169 (1983)
- /87/ Wirthgen, G.: Berechnungsverfahren der Betriebsfestigkeit und ihre Berücksichtigung in Vorschriftenentwürfen. IfL-Mitt. 21 (1982), S. 35 - 43
- /88/ Pfeiffer, F.: Beitrag zur Klärung des Einflusses regelloser Beanspruchungsfolgen auf die Bauteilermüdung. Diss. TU Dresden 1975
- /89/ Gassner, E., Kreutz, P.: Bedeutung des Programmbelastungsversuchs als einfachste Form der Simulation zufallsartiger Beanspruchungen. VDI-Fortschritt Bericht Reihe 5 Nr. 80, Düsseldorf 1984
- /90/ Schatt, W.: Pulvermetallurgie, Sinter- und Verbundwerkstoffe. Dt. Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1979
- /91/ Schatt, W.; Friedrich, E.: Versetzungsbildung während des Sinterns. Planseeberichte für Pulvermetallurgie 25 (1977), S. 145 - 156
- /92/ Schatt, W., Friedrich, E.: Self-activation of sintering processes in one-component systems. Powder Metallurgy Internat. 13 (1981), S. 15 - 20

- /93/ Schatt, W., Friedrich, E.: Versetzungsvervielfachung als Sinterreaktion, Z. Metallkunde 73 (1982), S. 56 - 62
- /94/ Schatt, W., Exner, H.E., Friedrich, E., Petzow, G.: Versetzungsaktivierte Schwindungsvorgänge beim Einkomponentensintern. Acta Metallurgica 30 (1982), S. 1367 - 1375
- /95/ Schatt, W., Friedrich, E.: Sintering as a result of defect structure. Crystal Research and Technology 17 (1982), S. 1061 - 1070
- /96/ Friedrich, E., Schatt, W.: Sintering of one-component model systems nucleation and movement of dislocations in necks. Powder Metallurgy, 23 (1980), S. 193 - 197
- /97/ Kuczynski, G.C.: Self-diffusion in Sintering of metallic particles. Metals Trans. AIME 185 (1949), S. 169 - 178
- /98/ Exner, H.E.: Grundlagen von Sintervorgängen. Materialkundlich-Technische Reihe 4, Gebr. Borntraeger, Berlin, Stuttgart 1978
- /99/ Herring, C.: Surface tension as a motivation for sintering. In: The Physics of Powder Metallurgy, Ed. W.E. Kingston, New York, Toronto, London 1951, S. 143 - 179
- /100/ Budó, A.: Theoretische Mechanik. Dt. Verlag der Wissenschaften, Berlin 1965, 3. Auflage
- /101/ Lenel, F.V.: Powder Metallurgy, Principles and Applications. Metal Powder Industries Federation, Princeton, New Jersey (1980), S. 253
- /102/ Gessinger, G.H., Lenel, F.V., Ansell, G.S.: Continuous observation of the sintering of silver particles in the electron microscope. Trans. Quart. ASM 61 (1968), S. 598 - 604
- /103/ German, R.M., Munir, Z.A.: Report SAND 74-8629, Sandia Laboratories Albuguerque 1974 (zitiert in /98/)
- /104/ Nichols, F.A., Mullins, W.W.: Morphological changes of a surface of revolution due to capillarity-induced surface diffusion. J.Appl.Phys. 36 (1965), S. 1826

- /105/ Bross, P.: Mathematische Erfassung von Sintervorgängen. Diss. Stuttgart 1976
- /106/ Bross, P., Exner, H.E.: Computer simulation of sintering processes. Acta Metallurgica 27 (1979), S. 1013 - 1020
- /107/ Ross, J.W.: Computer simulation of sintering kinetics in two-particle and powder systems. Ph. D. Dissertation, University of Toronto 1980
- /108/ Bolza, O.: Vorlesungen über Variationsrechnung. Verlag Koehler und Amelang Leipzig 1949
- /109/ Baule, B.: Variationsrechnung. Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Band V, Hirzel-Verlag Leipzig, 7. Auflage 1968
- /110/ Smirnow, W.I.: Lehrgang der höheren Mathematik, Teil IV. VEB Dt. Verlag der Wissenschaften, Berlin 1968
- /111/ Miller, M.: Variationsrechnung. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Bibliothek (24) B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1959
- /112/ Collatz, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Springer-Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg 1951
- /113/ Friedrich, E., Schatt, W.: Kinetik der Versetzungszonen beim selbstaktivierenden Sintern. VII. Internat. Pulvermetall. Tagung Dresden 1981, Bd. 2, S. 121 - 137
- /114/ Vladimirov, V.I.: Einführung in die physikalische Theorie der Plastizität und Festigkeit. VEB Dt. Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig, 1976
- /115/ Landolt-Börnstein: Zahlenwerte und Funktionen, Band IV/2c, Springer-Verlag 1964
- /116/ Geguzin, Ja.E.: Physik des Sinterns, VEB Dt. Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1973
- /117/ Schatt, W., Friedrich, E., Joensson, D.: Spannungsverteilung und Versetzungsvervielfachung in der Sinterkontaktregion. Acta metall. 31 (1983) S. 121 - 128
- /118/ Ullrich, H.J., Herenz, A. u.a.: Bestimmung der Versetzungsdichte im Sinterkontaktbereich. Mikrochimica Acta 1983 I, S. 175 - 191

- /119/ Stephan, D., Ullrich, H.J., Schulze, G.E.R.: Helldunkelstruktur der Kosselinterferenzlinien und Kristallstrukturanalyse. Kristall und Technik 11 (1976), S. 475 - 500
- /120/ Herenz, A. Ullrich, H.J. u.a.: Versetzungsdichtebestimmung im Sinterkontaktbereich. VII.Internat.Pulvermetall.Tagung Dresden 1981, Bd.1, S. 134
- /121/ Lindner, H.: Grundriß der Festkörperphysik. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1978
- /122/ Schatt, W. (Hrsg.): Einführung in die Werkstoffwissenschaft. VEB Dt.Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1983
- /123/ Joensson, D.: Berechnung der Schubspannungsverteilung in Zweikugel-Sintermodellen. Techn.Mechanik 4 (1983)3, S. 64 - 70
- /124/ Johnson, D.L.: New method of obtaining volume, grain-boundary, and surface diffusion coefficients from sintering data. J.Appl.Phys. 40 (1969), S. 192 - 200
- /125/ Easterling, K.E., Thölen, A.R.: A study of sintering using hot-stage electron microscopy. Metal Science Journal 4 (1970), S. 130 - 135
- /126/ Easterling, K.E., Thölen, A.R.: A photoelastic study of the stresses in sintering. Planseeberichte für Pulvermetallurgie 18 (1970), S. 81 - 83
- /127/ Petzow, G., Exner, H.E.: Particle rearrangement in solid state sintering. Z.f.Metallkunde 67 (1976), S. 611 - 618
- /128/ Boiko, Ju.I.: Njediffusionaja deformatsija Kristalličeskich Častich v Kontaktje schar-ploskostj pod dejstvijem Kapilljarnich zil. Poroškovaja metallurgija 17 (1977),Nr.2 S. 12 - 15
- /129/ Lányi, P.: Strukturelle Aktivität und Versetzungskinetik im Frühstadium des Sinterprozesses, Diss. ZfW der AdW, Dresden 1979

- /130/ Exner, H.E., Bross, P.: Material transport rate and stress distribution during grain boundary diffusion driven by surface tension. Acta Metallurgica 27 (1979), S.1007-1012
- /131/ Lányi, P.: Theoretische Analyse der Versetzungsbildung beim Sintern. VII. Internat. Pulvermetall. Tagung Dresden 1981, Bd. 2, S. 103 - 120
- /132/ Boiko, Ju.I., Geguzin, Ja.E., Klinčuk, J.I.: Modelirovanje naprjašenii v kontaktnoi zone spekajusšichsja Krupinok metodom foto uprugosti. Poroškovaja metallurgija 22 (1982) Nr. 3, S. 29 - 31
- /133/ Zienkiewicz, O.C.: Methode der finiten Elemente. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1974
- /134/ Dankert, J.: Numerische Methoden der Mechanik. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1977
- /135/ Altenbach, J., Sacharov, A.S. (Hrsg.): Die Methode der finiten Elemente in der Festkörpermechanik. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1982
- /136/ Crossmann, F.W., Ashby, M.F.: The non-uniform flow of polycrystals by grain-boundary sliding accommodated by power-law creep. Acta metall. 23 (1975), S. 425 - 440
- /137/ Methew, J., Brody, H.D. in: Computer simulation for materials applications. Ed. Arsenault, Beeler, Simmons; National Bureau of Standards, Gaithersburg 1976, S. 1138
- /138/ Chung, T.J.: Finite Elemente in der Strömungsmechanik VEB Fachbuchverlag Leipzig 1983
- /139/ Krämer, M.: Programmbeschreibung MSP 172. Rechner: ODRA 1204, Forschungszentrum des VEB Kombinat Pumpen und Verdichter Halle 1979
- /140/ Gabbert, U.: Die Methode der finiten Elemente zur Berechnung axialsymmetrischer Körper. Wiss. Z. der TH Magdeburg 16 (1972) 4, S. 311 - 322



- /141/ Filonenko-Boroditsch, M.M.: Elastizitätstheorie.  
VEB Fachbuchverlag Leipzig 1967
- /142/ Gabbert, U., Joensson, D.: Programmbeschreibung SCHEIBE 3  
(MH 214/75-0), Rechner siehe /139/, 1975
- /143/ Joensson, D.: Programmbeschreibung DATGEN 2 (MH 218/75-0),  
Rechner siehe /139/, 1976
- /144/ Joensson, D.: Programmbeschreibung VDIG als Modifikation  
zu /145/. In: /65/, Anlage B7 - 10, Rechner siehe /139/,  
1977
- /145/ Berger, W.: Programmbeschreibung DIGINETZ MD (MH247/77-0)  
Rechner siehe /139/, 1977
- /146/ Joensson, D.: Anwendung finiter Elemente auf die Berech-  
nung von Kerbspannungen. Maschinenbautechnik 31 (1982)10,  
S. 464 - 467
- /147/ Schnack, E.: Effektivitätsuntersuchung für numerische  
Verfahren bei Festigkeitsberechnungen. VDI-Z. 119 (1977),  
S. 43 - 50
- /148/ Führung, H.: Finit-Element-Lösungen von Kerb- und RiB-  
problemen mit Hilfe automatischer Netzerzeugung. Institut  
für Statik und Stahlbau der TH Darmstadt, Heft 24, 1973
- /149/ Duda, M.: Eine vergleichende Untersuchung der Wirtschaft-  
lichkeit ebener finiter Elemente. Diss. TH Darmstadt, 1975
- /150/ Friedrich, E., Schatt, W.: High temperature plasticity  
on solid phase sintering. Science of Sintering 15 (1983),  
S. 63 - 71
- /151/ Gleiter, H.: Korngrenzen in metallischen Werkstoffen.  
Materialkundlich-Techn. Reihe 2, Gebr. Borntraeger,  
Berlin 1977

Anlagen zur Dissertation

Anlage A zum Teil I (FFT)

Anlage B zum Teil II (FEM)

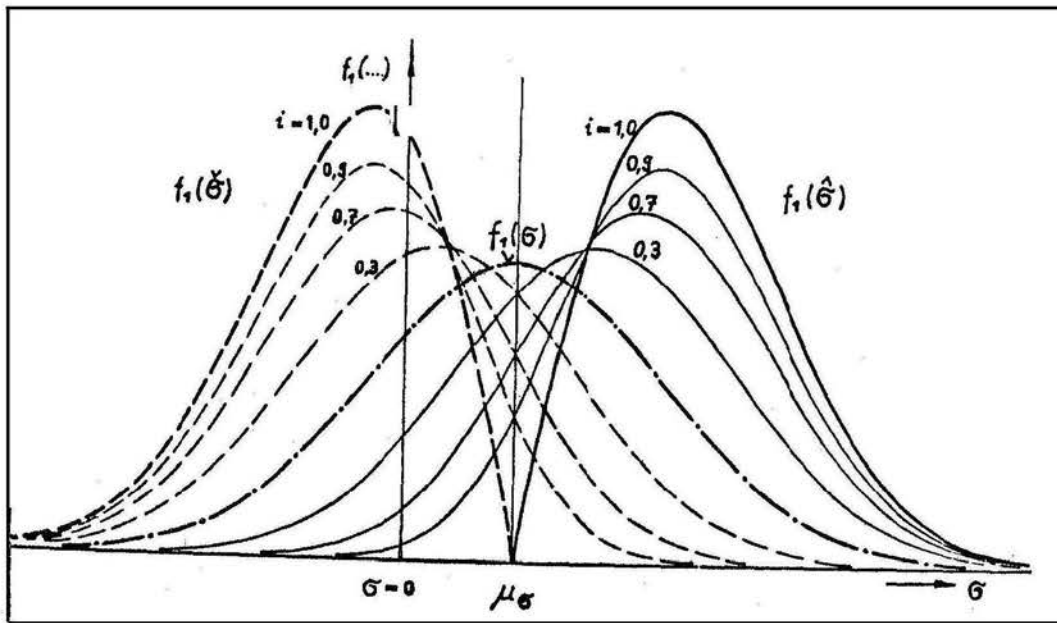
## Anlagenverzeichnis

### Anlage A

- A 1: Kennzeichnung eines stationären ergodischen Gaußprozesses
- A 2: Der Faktor  $u_B(\rho, i)$
- A 3: Die Programme SLEBE1 und SLEBE2 im Flußdiagramm
- A 4: SLEBE2-Unterprogramm-Struktur
- A 5 - 6: Beispiele 1 bis 7
- A 7: Schädigungsgradientenfunktionen zu den Beispielen 5 und 7
- A 8 -14: Beispiele 8 bis 41
- A15: Übersicht zu den Schadenssummen für verschiedene Faktoren u
- A16: Schadenssummen Q im Gauß'schen Wahrscheinlichkeitsnetz
- A17 -19: Programmtexte SLEBE2/SGRAF
- A20: Dialogbeispiel zu SLEBE2

### Anlage B

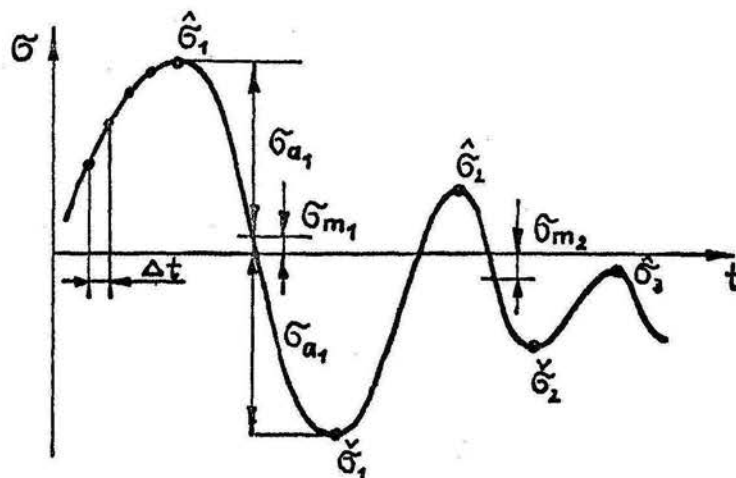
- B 1: Versetzungsätzbild und gemessene Versetzungsdichte-  
verteilung
- B 2: Nutzung der Rotations- und Teilchensymmetrie
- B 3: Korrektur zum Unterprogramm SPANN
- B 4 - 5: Zerlegung in finite Elemente, Modelle M1 bis M4
- B 6: Beispiele zu berechneten Spannungsverteilungen
- B 7: Schubspannungsverteilung  $\tau_{uv}(r, z)$
- B 8: Aktivierbare Gebiete für verschiedene Werte von  
 $\tau_{Krit}$
- B 9: Gegenüberstellung gemessener Versetzungsdichte  $N(r, z)$   
und berechneter Schubspannungen  $\tau_{uv}(r, z)$



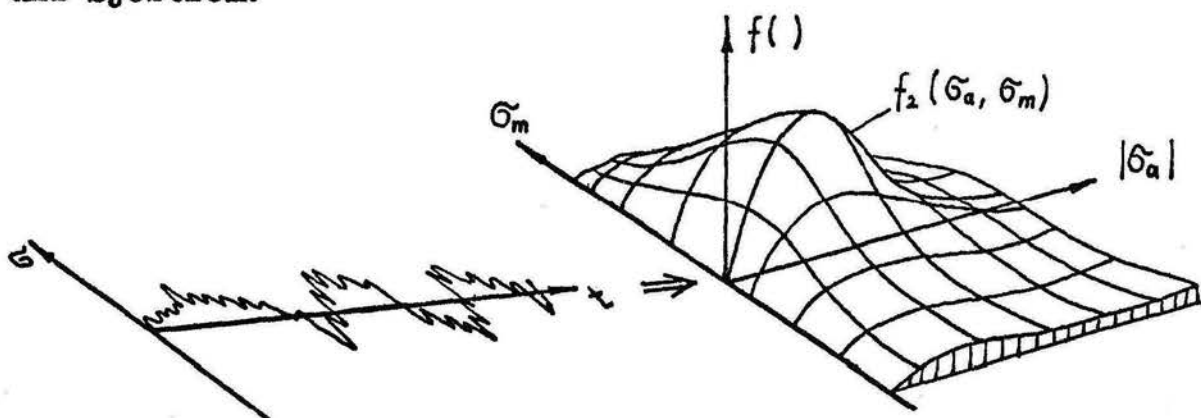
Dichtefunktionen der Momentanwerte  $\hat{\sigma}$  (— — —), der Maxima  $\hat{\sigma}$  (——) und der Minima  $\check{\sigma}$  (— — —) eines Gauß'schen Prozesses in Abhängigkeit von der Regellosigkeit  $i$

Zur Definition ausgewählter Werte eines Beanspruchungs-Zyklus (Schwingspiel):

- $\hat{\sigma}$  Maximum
- $\check{\sigma}$  Minimum
- $\sigma_a$  Amplitude
- $\sigma_m$  Mittelspannung
- Momentanwert



spezielle Dichtefunktion nach Kowalewski und Sjöström:

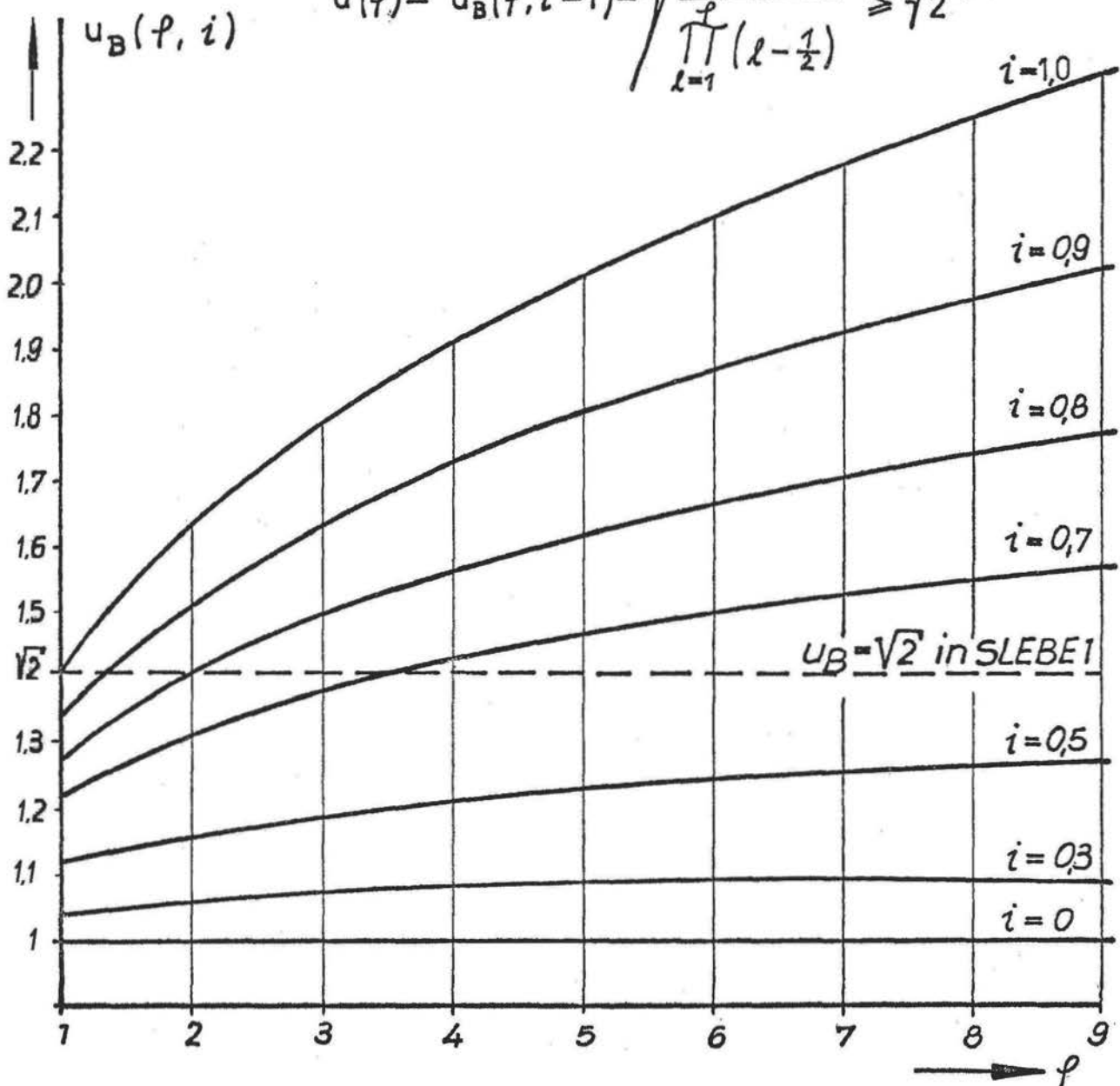


$$\overline{\Delta D_K^2} = u_B(\rho, i) \cdot \Delta D_{\text{eff}}$$

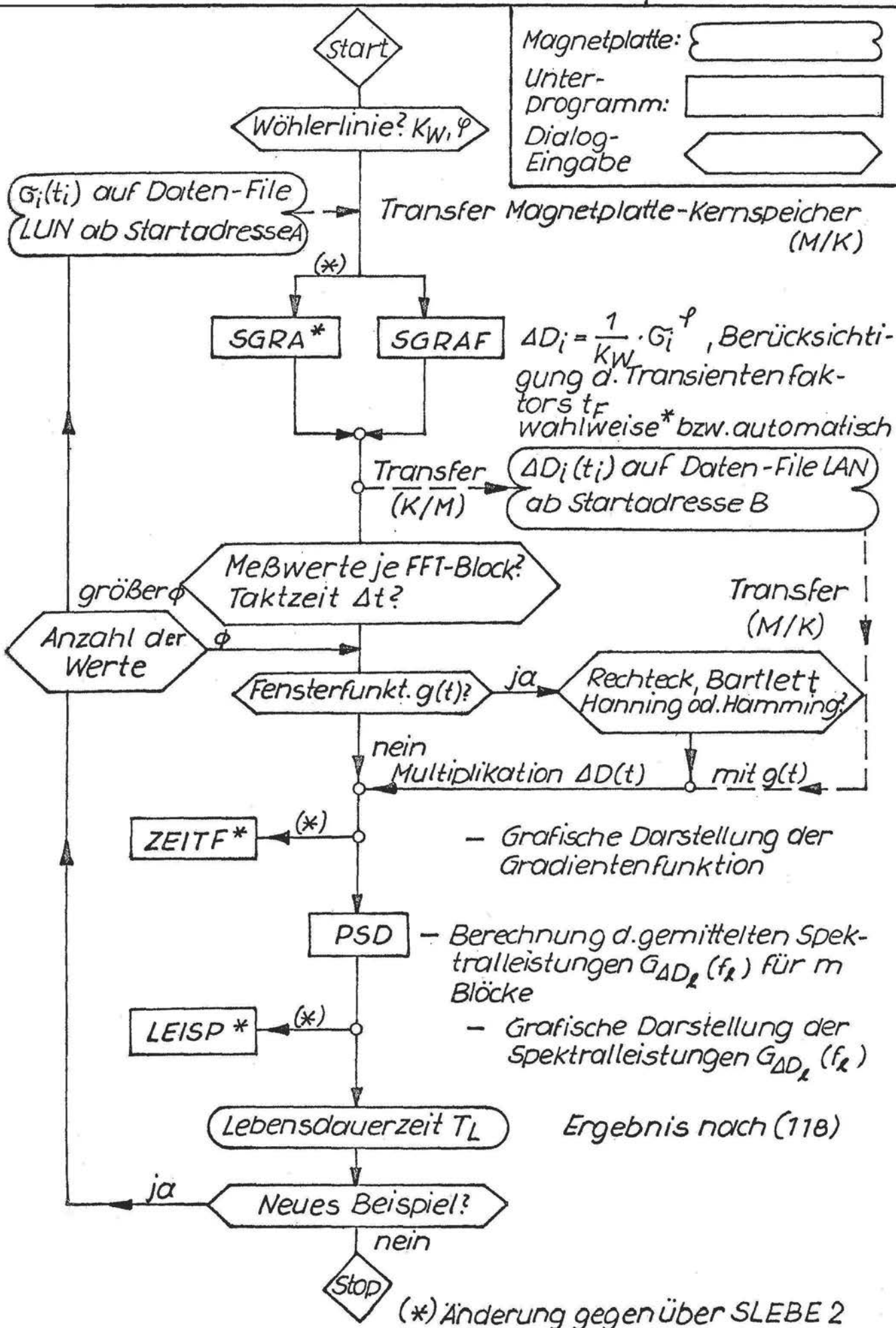
mit:

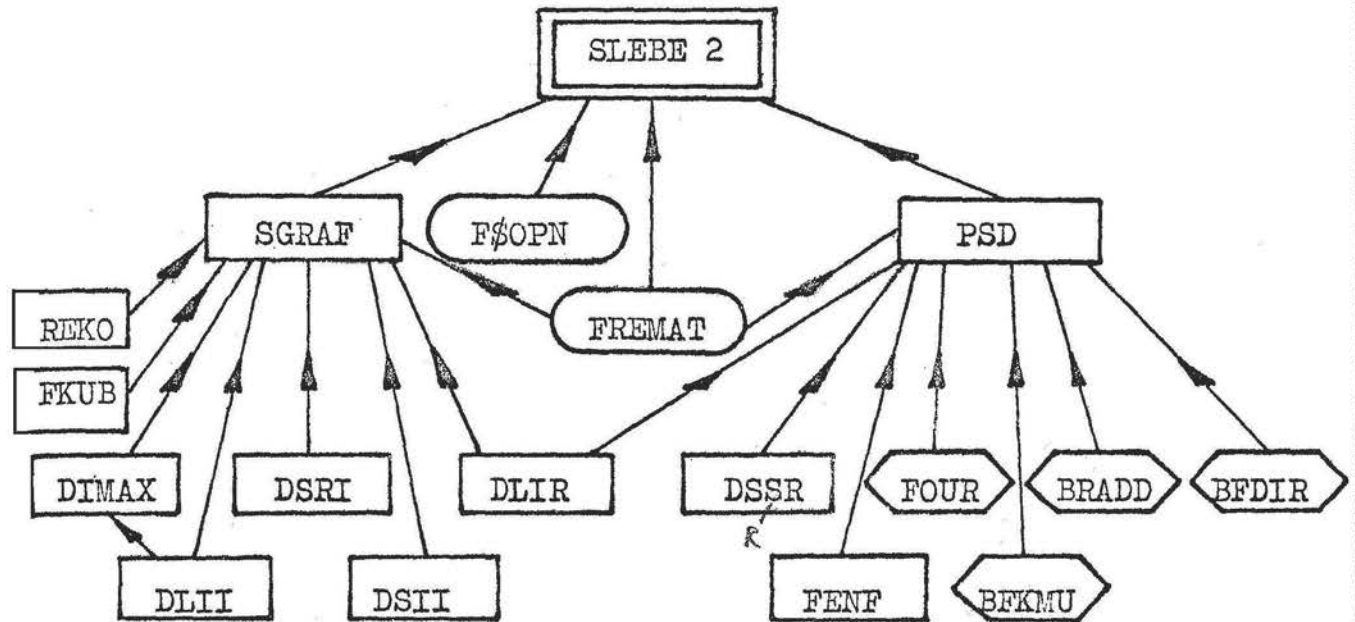
$$u_B(\rho, i) = \sqrt{\frac{\prod_{l=1}^{\rho} (2l-1+i^2)}{\prod_{l=1}^{\rho} (2l-1)}} = \sqrt{\frac{1+i^2}{2}} \quad u(\rho) \geq 1$$

$$u(\rho) = u_B(\rho, i=1) = \sqrt{\frac{\rho!}{\prod_{l=1}^{\rho} (l-\frac{1}{2})}} \geq \sqrt{2}$$



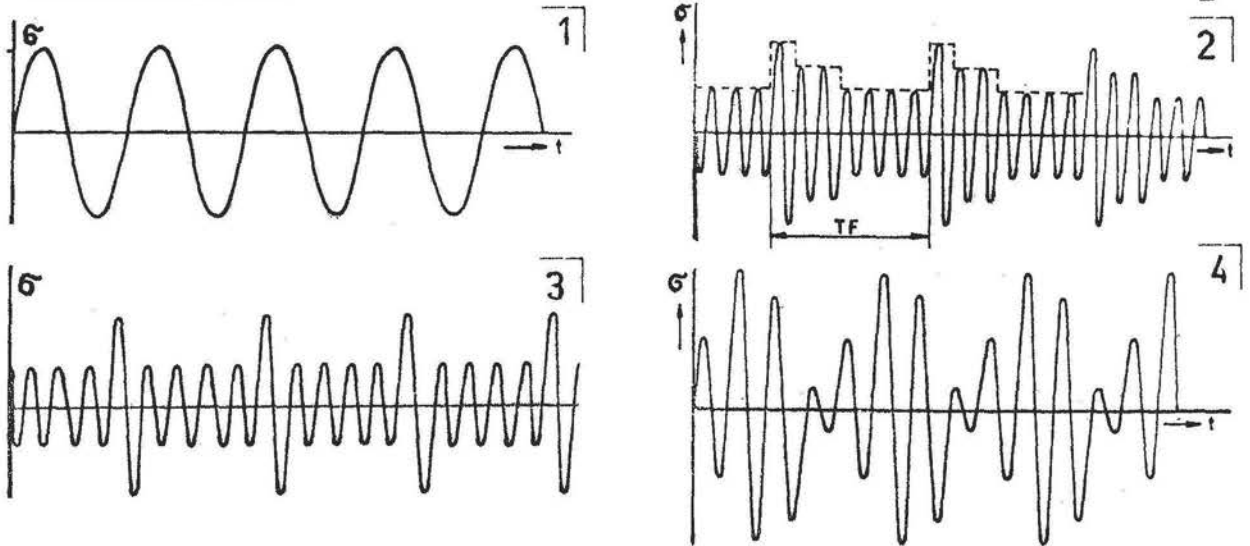






Unterprogramm	Erläuterung	Programm/ -paket	Quelle
SGRAF	Schadigungsgradientenfunktion berechnen	SLEBE 2	/52/
F\$OPN FREMAT	Eröffnen einer logischen Nummer Freiformat	-	/75/
PSD	Berechnung der Spektralleistung	EPRO 3	/46/
DIMAX	Größtwert eines beliebig großen Integer-Vektors bestimmen	SLEBE1,2	/52/
DSRI	Daten schreiben von Real-Speicher auf Integer-Feld	Progr.- paket DATM	/73/
DLII	Daten lesen von Integer-Speicher auf Integer-Feld		
DSII	Daten schreiben von Integer-Speicher auf Integer-Feld		
DLIR	Daten lesen von Integer-Speicher auf Real-Feld		
DSRR	Daten schreiben von Real-Speicher auf Real-Feld		
FENF	Fensterfunktion im Zeitbereich: Rechteck, Bartlett, Hanning, Hamming	EPRO 3	/46/
FOUR	Algorithmus zur schnellen Fourier- transformation	Progr.- paket FFTA40	/53/
BFKMU	Komplexe Multiplikation im Frequenzbereich		
BRADD BFDIR	Addition zweier Real-Felder Division eines Feldes durch eine Konstante		
REKO FKUB	Regellosigkeitskoeffizient berech- nen Faktor $u_B(\rho, i)$ ermitteln	SLEBE 2	/52/

Modellbeispiele: Wöhlerlinie  $N(\sigma) = 1,27 \cdot 10^{17} \cdot \sigma^{-5,42}$  mit  $\sigma_D = 0$



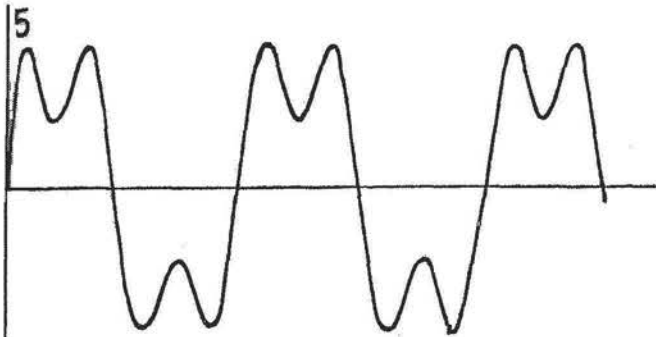
Bei- spiel	$\hat{\sigma}_{max}$ MPa	$f_o$ Hz	Block-Struktur				
			Stu- fen	Nr.K	$\sigma_K$ /MPa	$n_K$	$N_K$
1	180	20	1	1	180	1	75 897
2	240	20	3	1	240	1	15 961
				2	180	2	75 897
				3	120	4	683 347
3	240	20	2	1	240	1	15 961
				2	120	4	683 347
4	170	15	4	1	170	1	103 460
				2	140,3	1	292 921
				3	89,6	1	3 328 851
				4	30,8	1	$1,086 \cdot 10^9$

Ergebnisse			$Q = T_E/T_L$ bzw. $(\sigma_{NL}/T_L)^*$ mit SLEBE 2**			
Beisp.	$T_E$ in s	$T_{NL}$ in s	Rechteck	Bartlett	Hanning	Hamming
1	3794,95	3794,95	0,85	0,97	1,03	0,98
2	-	2023,3	(0,79)	(0,91)	(0,96)	(0,92)
3	-	1782,6	(0,77)	(0,89)	(0,95)	(0,90)
4	-	13002	(0,89)	(0,92)	(0,98)	(0,93)

\*)  $T_{NL} = N_L/f_o$  mit  $N_L$  nach Gleichung (90).

\*\*\*) mit  $u_B$  ( $p = 5,42$  und  $i = 1$ )  $\approx 2,06$

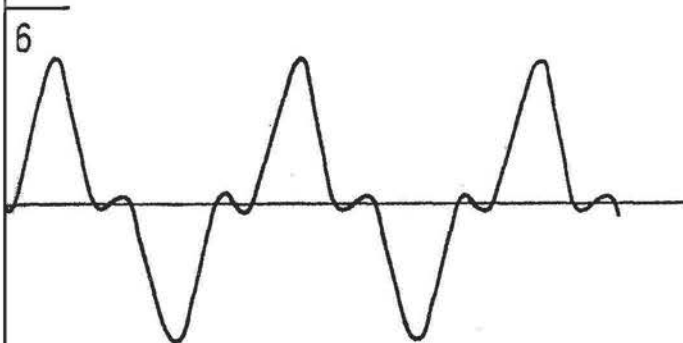
Eigene Versuche: St 38, gekerbte Rundprobe



harmonische Anteile:

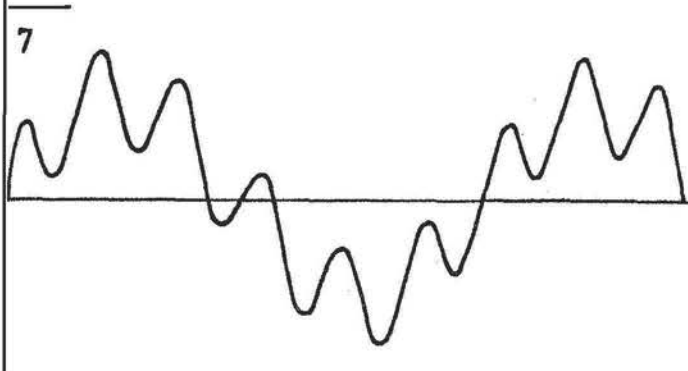
$$\sigma_{H_1} = 157,4 \text{ MPa} \quad f_1 = 5 \text{ Hz}$$

$$\sigma_{H_2} = 78,7 \text{ MPa} \quad f_2 = 15 \text{ Hz}$$



$$\sigma_{H_1} = 113,3 \text{ MPa} \quad f_1 = 5 \text{ Hz}$$

$$\sigma_{H_2} = 56,7 \text{ MPa} \quad f_2 = 15 \text{ Hz}$$



$$\sigma_{H_1} = 113,3 \text{ MPa} \quad f_1 = 2,5 \text{ Hz}$$

$$\sigma_{H_2} = 56,7 \text{ MPa} \quad f_2 = 15 \text{ Hz}$$

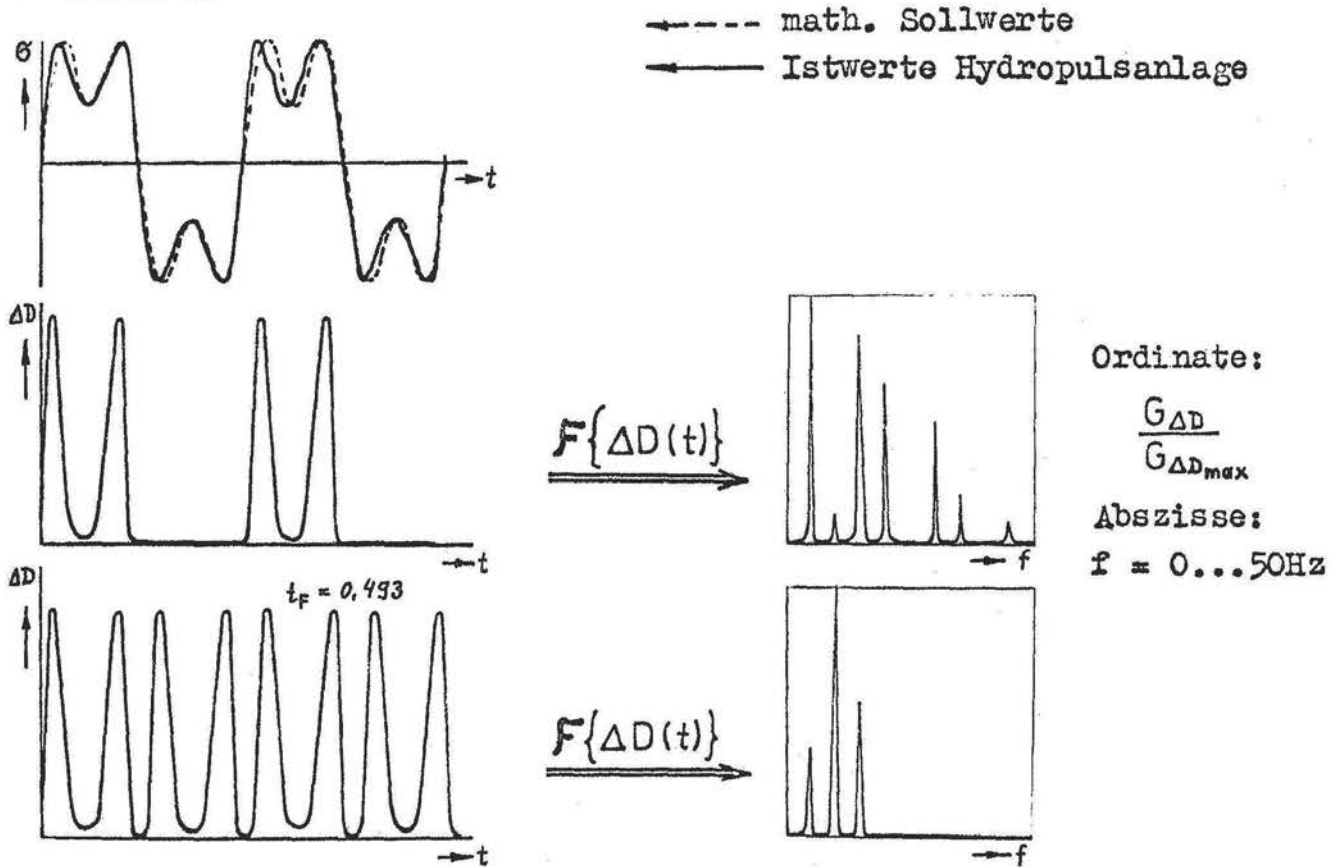
Einheitlich  $\hat{\sigma}_{\max} = 170 \text{ MPa}$

Wöhlerlinie:  $N(\sigma) = 1,27 \cdot 10^{17} \cdot \sigma^{-5,42}$  mit  $\sigma_D = 0$   
für 50% Bruchwahrscheinlichkeit

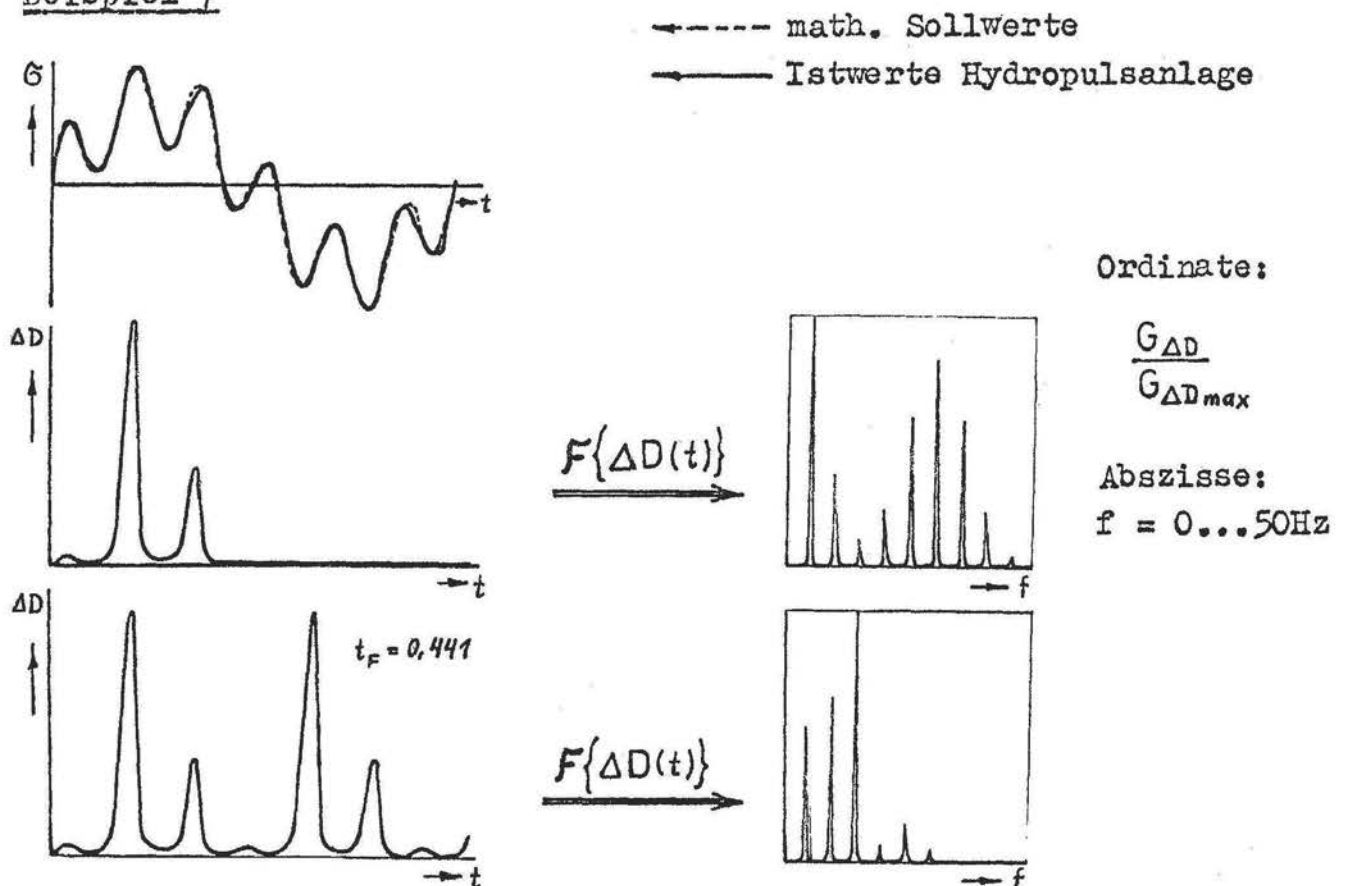
Schadenssummen:

Beispiel	$T_E$ in s	$Q = T_E/T_L$ mit SLEBE 1 ( $u = \sqrt{2}$ )			
		Rechteck	Bartlett	Hanning	Hamming
5	18 185	0,98	1,11	1,18	1,13
6	36 494	1,01	1,18	1,25	1,19
7	37 477	0,96	1,10	1,17	1,11

Beispiel 5



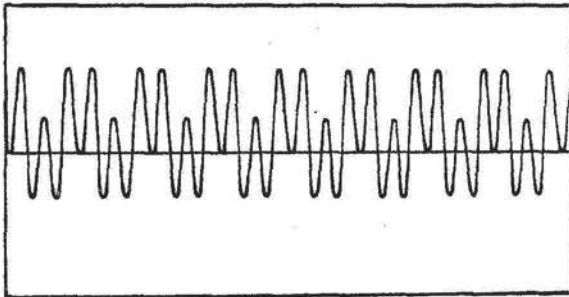
Beispiel 7



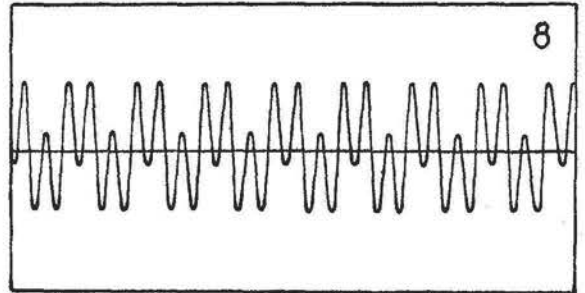


Versuche von F.Lange /62/: St 42, gekerbte Flachproben

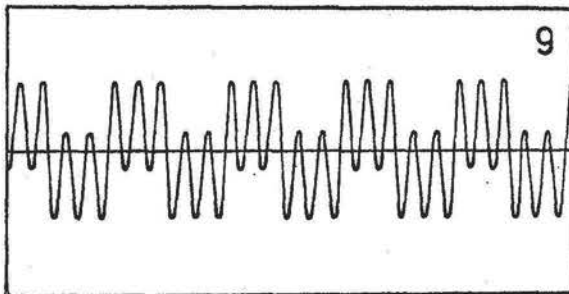
$n_{\text{Block}} = 2$ , nicht zentriert



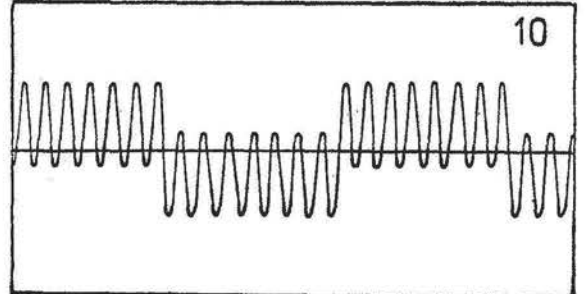
$n_{\text{Block}} = 2$ , zentriert



$n_{\text{Block}} = 3$ , zentriert



$n_{\text{Block}} = 8$ , zentriert



- Wöhlerlinie ohne Mittelspannung aus /62/ S. 21:

$$N(\sigma) = 7,223 \cdot 10^{17} \cdot \sigma^{-5,80}$$

$$(\sigma_1 = 180 \text{ MPa}, N_1 = 60\,000, \sigma_2 = 140 \text{ MPa}, N_2 = 258\,000)$$

- Mittelspannungsempfindlichkeit  $\psi = \frac{\sigma_{ar} - \sigma_{an}}{\sigma_m} = \frac{210,8 - 200}{50} = 0,216$

⇒ Wöhlerlinie für Zugmittelspannung  $\sigma_{Zm} = 65 \text{ MPa}$ :

$$N(\sigma) = 4,312 \cdot 10^{17} \cdot \sigma^{-5,80} \quad (\text{Eingabe in SLEBE 1})$$

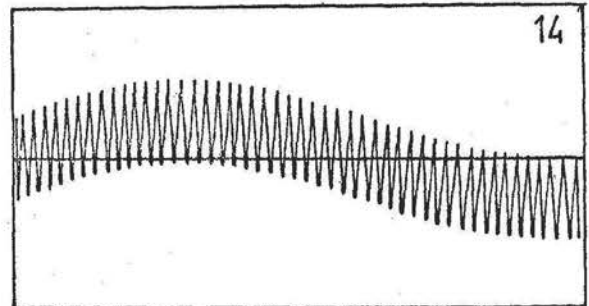
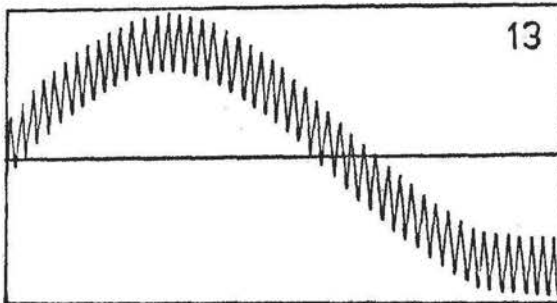
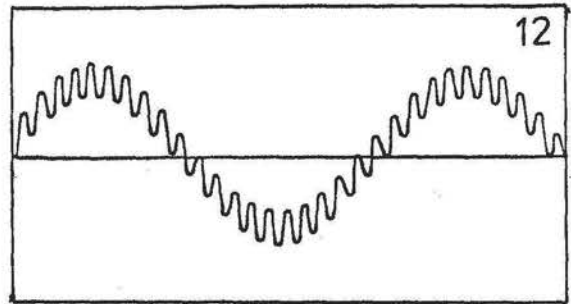
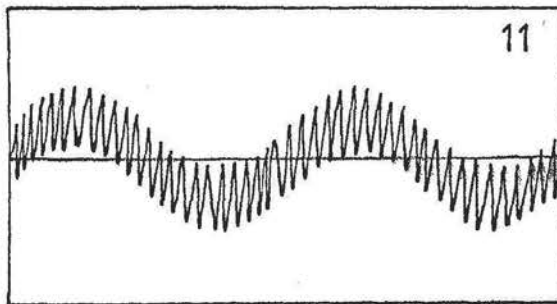
Schadenssummen:

Beisp.	$N_E$ (*)	$Q = N_E / (T_L^{**} \cdot f_0)$	
		Rechteck	Hanning
8	13 000	0,25	0,32
9	26 000	0,46	0,57
10	60 000	0,98	1,13

\* Nur interpoliert aus /62/, S.28

\*\*  $T_L$  mit SLEBE 1 ( $u = \sqrt{2}$ )

Versuche von Wirthgen /63/: St 45/60, gekerbte Flachproben



Biharmonische Funktion:  $\sigma(t) = \sigma_1 \sin 2\pi f_1 t + \sigma_2 \sin 2\pi f_2 t$

Beispiel	$\sigma$ in kp/mm <sup>2</sup>		f in Hz		N <sub>E</sub> aus /64/:
	$\sigma_1$	$\sigma_2$	f <sub>1</sub>	f <sub>2</sub>	
11	6,0	6,0	2,0	42,0	S. 13
12	12,0	4,0	1,5	31,5	S. 14
13	18,0	6,0	0,8	48,8	S. 18
14	6,0	8,0	0,8	48,8	S. 16

Wöhlerlinie:  $N(\sigma) = 8,216 \cdot 10^{16} \cdot \sigma^{-5,61}$  mit  $\sigma_D = 0$

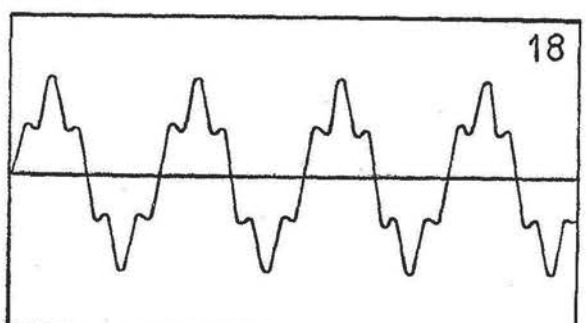
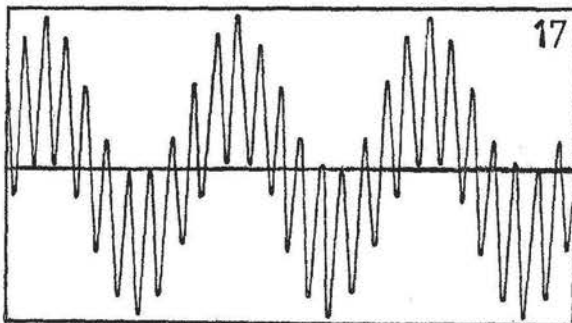
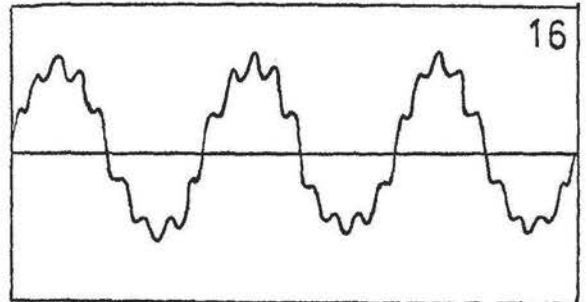
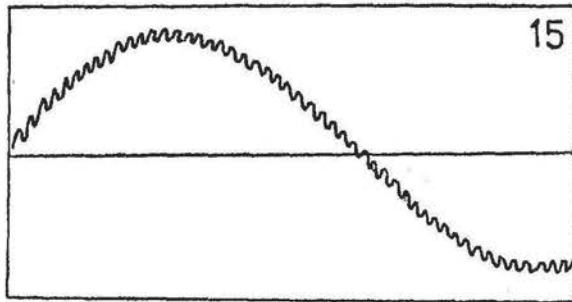
Schadenssummen:

Beispiel	T <sub>E</sub> in s	Q = T <sub>E</sub> /T <sub>L</sub> mit SLEBE 1(u = √2)			
		Rechteck	Bartlett	Hanning	Hamming
11	180 833	0,69	0,78	0,83	0,79
12	83 540	0,96	1,05	1,12	1,06
13	16 835	2,76	3,09	3,36	3,20
14	71 455	0,86	0,95	1,04	0,99

$$T_E = N_E / f_2$$

Versuche von Wirthgen /63/:

St 45/60, gekerbte Flachproben



Biharmonische Funktion:  $\sigma(t) = \sigma_1 \cdot \sin 2\pi f_1 t + \sigma_2 \sin 2\pi f_2 t$

Beispiel	$\sigma$ in $\text{kp/mm}^2$		$f$ in Hz		$N_E$ aus /64/:
	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$f_1$	$f_2$	
15	18,0	2,0	0,8	48,8	S. 18
16	12,0	2,0	3,0	27,0	S. 20
17	12,0	12,0	3,0	27,0	S. 20
18	12,0	4,0	4,0	20,0	S. 25

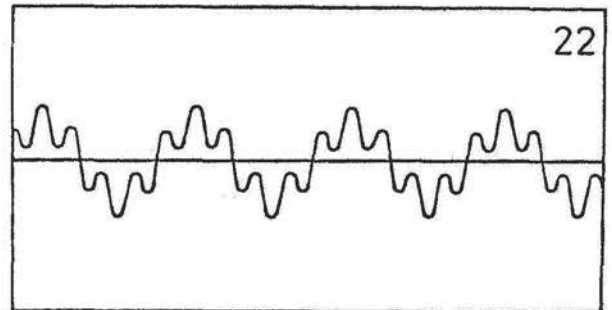
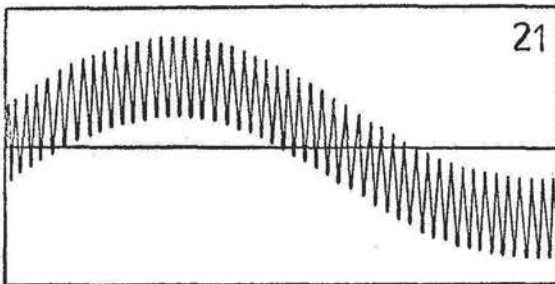
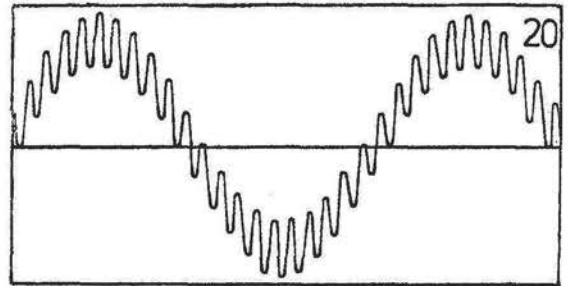
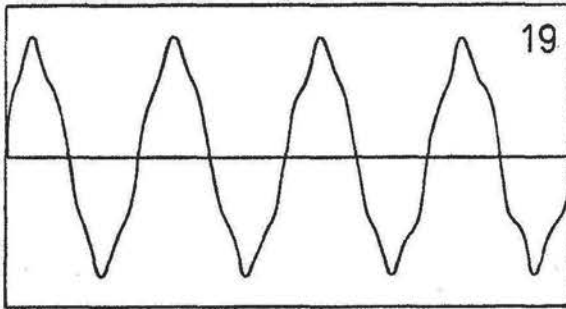
Wöhlerlinie:  $N(\sigma) = 8,218 \cdot 10^{17} \cdot \sigma^{-5,61}$  mit  $\sigma_D = 0$

Schadenssummen:

Beispiel	$T_E$ in s	$Q = T_E/T_L$ mit SLEBE 1 ( $u = \sqrt{2}$ )			
		Rechteck	Bartlett	Hanning	Hamming
15	51 291	2,02	2,20	2,39	2,28
16	87 178	0,34	0,39	0,41	0,39
17	4 985	0,58	0,67	0,70	0,67
18	45 450	0,42	0,48	0,51	0,50

$$T_E = N_E / f_2$$

Versuche von Wirthgen /63/: St 45/60, gekerbte Flachproben



Biharmonische Funktion:  $\sigma(t) = \sigma_1 \sin 2\pi f_1 t + \sigma_2 \sin 2\pi f_2 t$

Beispiel	$\sigma$ in $\text{kp/mm}^2$		f in Hz		$N_E$ aus /64/:
	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$f_1$	$f_2$	
19	18,0	2,0	4,0	20,0	S. 26
20	18,0	6,0	1,5	31,5	S. 15
21	12,0	8,0	0,8	48,8	S. 17
22	6,0	4,0	4,0	20,0	S. 24

Wöhlerlinie:  $N(\sigma) = 8,218 \cdot 10^{17} \cdot \sigma^{-5,61}$  mit  $\sigma_D = 0$

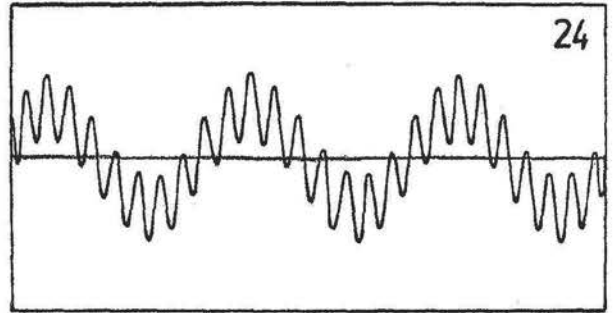
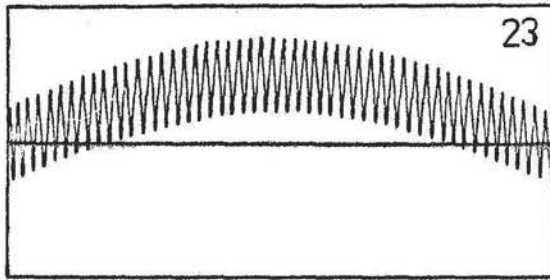
Schadenssummen:

Beispiel	$T_E$ in s	$Q = T_E/T_L$ mit SLEBE 1 ( $u = \sqrt{2}$ )			
		Rechteck	Bartlett	Hanning	Hamming
19	10 135	0,29	0,30	0,32	0,30
20	15 216	1,81	1,99	2,11	2,01
21	23 811	1,72	1,92	2,09	1,99
22	249 525 <sup>*</sup>	0,16	0,19	0,20	0,19

<sup>\*</sup>nur 2 Proben

$$T_E = N_E / f_2$$

Versuche von Wirthgen /63/: St 45/60, gekerbte Flachproben  
 Wöhlerlinie und biharmonische Funktion wie in Anlagen A9 - 11



$\sigma_1 = 12,0 \text{ kp/mm}^2, f_1 = 0,505 \text{ Hz}$   
 $\sigma_2 = 8,0 \text{ kp/mm}^2, f_2 = 50 \text{ Hz}$

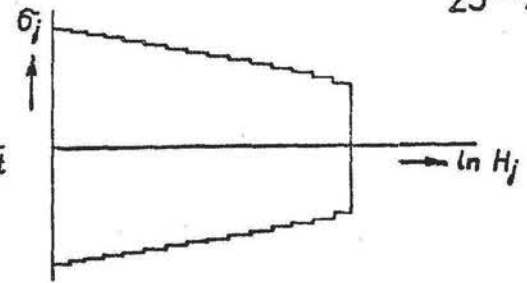
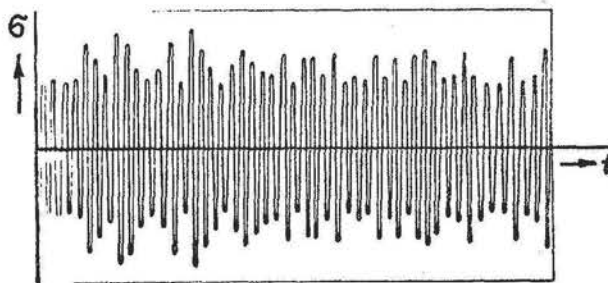
$\sigma_1 = 8,0 \text{ kp/mm}^2, f_1 = 3 \text{ Hz}$   
 $\sigma_2 = 6,0 \text{ kp/mm}^2, f_2 = 27 \text{ Hz}$

Schadenssummen:

Bei- spiel	$N_E$ aus /64/:	$T_E$ in s	$Q = T_E/T_L$ mit SLEBE 1 ( $u = \sqrt{2}$ )			
			Rechteck	Bartlett	Hanning	Hamming
23	S. 19	21 140	1,90	2,16	2,28	2,17
24	S. 22	58 778	0,33	0,36	0,38	0,37

$T_E = N_E/f_2$

Versuche von Luber /66/: St 38, ungekerbte Rundprobe



25 - 26

Wöhlerlinie:  $N(\sigma) = 2,694 \cdot 10^{24} \cdot \sigma^{-8,06}$  mit  $\sigma_D = 230 \text{ MPa}$   
 (aus /66/ Anlage, Bild 36:  $\sigma_1 = 300 \text{ MPa}, N_1 = 30\ 000, \sigma_2 = 260 \text{ MPa}, N_2 = 95\ 000$ )

Schadenssummen:

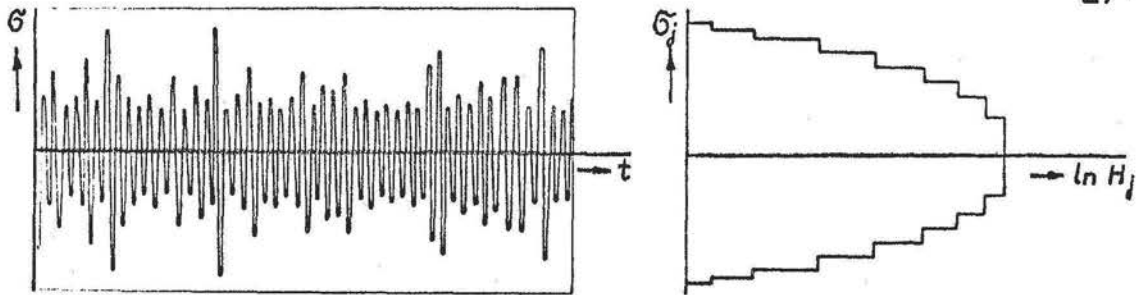
Beispiel	$N_E$	$\hat{\sigma}_{max}$ in MPa	$Q = N_E/N_L$
25	98 100	405	1,15
26	2456 100	304	2,85 ohne $\sigma_D$ (2,09 mit $\sigma_D$ )

$N_E$  aus /66/,  
 Anlage 20;  
 $N_L$  nach  
 Gl. 90



Eigene Versuche /65/: St 38, gekerbte Rund- und Flachproben

27-34

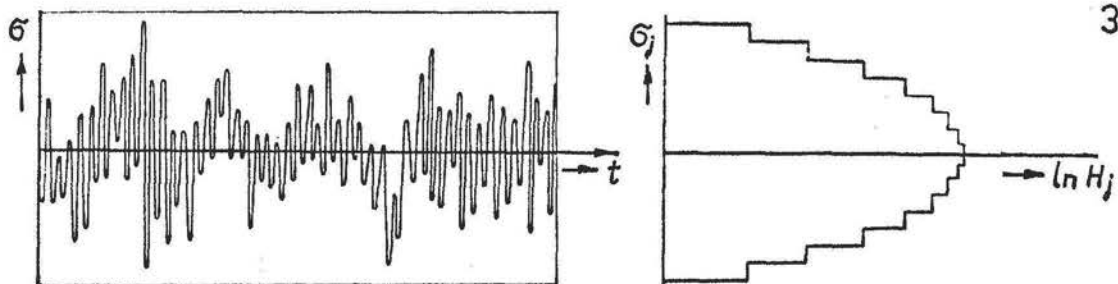


Bei- spiel	$\hat{\sigma}_{max}$ in MPa	$N_E$	$N_E/N_L$	Wöhlerlinie $K_W/10^7$	$p$	Probenform
27	230	569 600	1,75	1,885	5,64	Rundprobe
28	180	2036 500	1,57			
29	230	1092 800	1,36	287,4	6,45	Flachprobe "F4"
30	180	9410 100	2,40			
31	230	476 300	1,12	25,5	6,10	Flachprobe "F6"
32	180	2386 200	1,25			
33	230	337 200	1,03	37,88	6,23	Flachprobe "F8"
34	180	1226 700	0,82			

$N_L$  nach Gleichung (90)

Versuche von Wirthgen /63/: St 45/60, gekerbte Flachprobe

35



Regellosigkeitskoeffizient  $i = 0,93$ , Korrelationskoeffizient  $r = 0,5$ .  
 Wöhlerlinie  $N(\sigma) = 9,483 \cdot 10^{17} \cdot \sigma^{-5,61}$

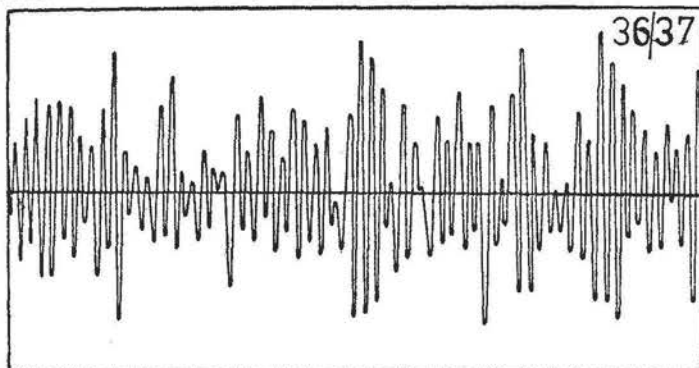
Beispiel	$\hat{\sigma}_{max}$ in MPa	$N_E$	$N_E/N_L$
35	294	170 000	1,36

$N_E$  aus /63/, S. 104

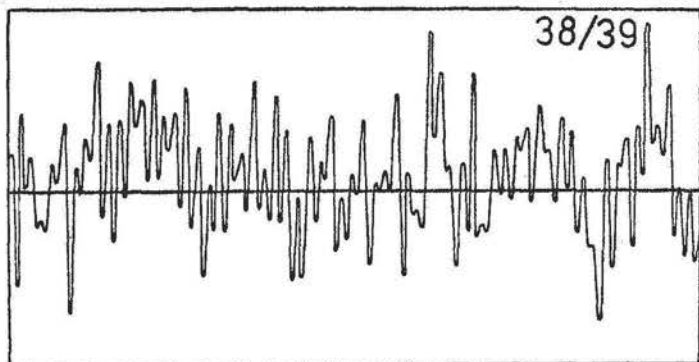
$N_L$  nach Gl. (90)

Kollektivwerte "Random, Stellung 3" aus /63/, S. 101

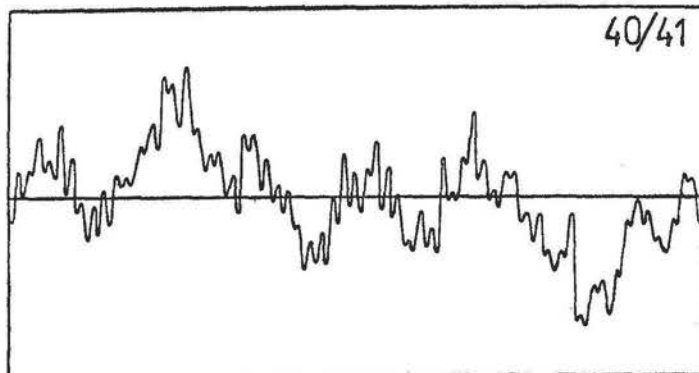
Versuche von D.Lange /58/: St 38, gekerbte Rundproben



Regellosigkeit  $i = 0,95$



Regellosigkeit  $i = 0,7$



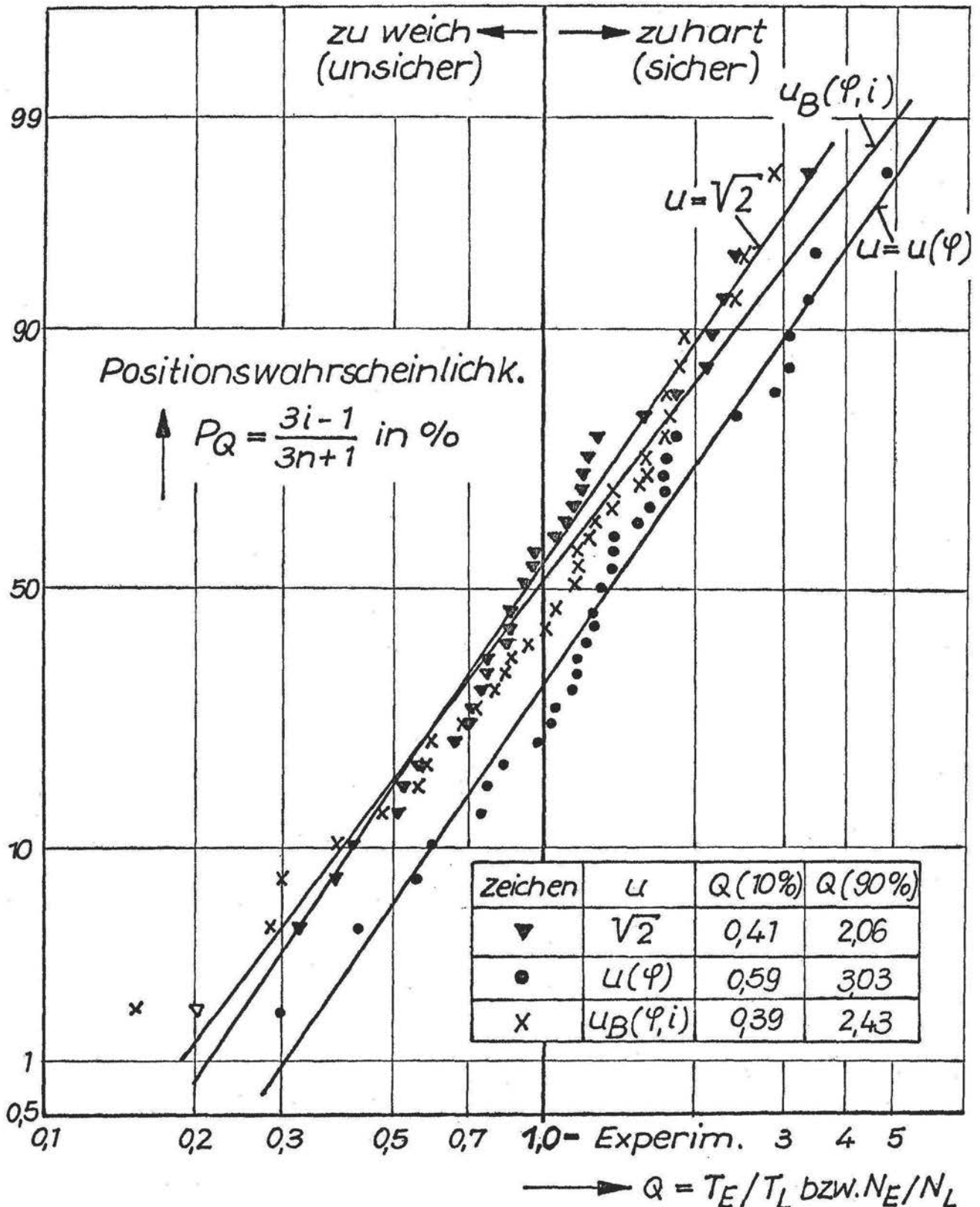
Regellosigkeit  $i = 0,3$

Wöhlerlinie:  $N(\sigma) = 1,27 \cdot 10^{17} \cdot \sigma^{-5,42}$  mit  $\sigma_D = 0$   
 Schadenssummen:

Beisp.	$\hat{\sigma}_{max}$ in MPa	$T_E$ in s	$Q = \frac{T_E}{T_L} \cdot \frac{1}{0,6}$ , $T_L$ m. SLEBE $1(u = \sqrt{2})$			
			Rechteck	Bartlett	Hanning	Hamming
36	220	47 467	0,74	0,82	0,84	0,82
37	150	320 480	0,76	0,84	0,89	0,85
38	220	38 733	0,51	0,49	0,52	0,50
39	150	252 173	0,44	0,62	0,66	0,62
40	220	215 093	0,63	0,89	0,95	0,89
41	180	447 773	0,49	0,71	0,76	0,71

Übersicht zu den Schadenssummen für verschiedene Faktoren u (SLEBE-Berechnung m. Hanning-Fenster)							Anlage A15	
				Q für Faktor u =				
Nr.	Beispiel	$f$	$i$	$\sqrt{2}$	$u(f)$	$u_B(f, i)$	Anlage	Versuche von
1	5		0,33	1,18	1,71	0,93	A 6	Joensson
2	6	5,42	1,00	1,25	1,81	1,81		
3	7		0,17	1,17	1,70	0,85		
4	11		0,05	0,83	1,20	0,59	A 9	Wirthgen
5	12	5,61	0,05	1,12	1,62	0,79		
6	13		0,17	3,36	4,87	2,45		
7	14		1,00	1,04	1,51	1,51		
8	15		0,17	2,39	3,46	1,74	A10	Wirthgen
9	16		0,11	0,41	0,59	0,29		
10	17	5,61	1,00	0,70	1,01	1,01		
11	18		0,20	0,51	0,74	0,38		
12	19		1,00	0,32	0,47	0,47	A11	Wirthgen
13	20	5,61	0,24	2,11	3,07	1,57		
14	21		0,45	2,09	3,04	1,74		
15	22		0,20	0,20	0,29	0,15		
16	23		0,40	2,28	3,32	1,89	A12	Wirthgen
17	24	5,61	0,20	0,38	0,55	0,28		
18	25		1,00	0,74	1,15	1,15 *	A12	Luber
19	26	8,06		1,82	2,85	2,85 *		
20	27		1,00	1,20	1,75	1,75 *	A13	Joensson
21	28	5,64		1,08	1,57	1,57 *		
22	29		1,00	0,90	1,36	1,36 *		
23	30	6,45		1,59	2,40	2,40 *		
24	31		1,00	0,75	1,12	1,12 *		
25	32	6,10		0,84	1,25	1,25 *		
26	33		1,00	0,69	1,03	1,03 *		
27	34	6,23		0,55	0,82	0,82 *		
28	35	5,60	0,93	0,93	1,36	1,36 *	A13	Wirthgen
29	36		0,95	0,84	1,23	1,15 *	A14	D.Lange
30	37	5,42		0,89	1,29	1,21 *		
31	38		0,70	0,52	0,76	0,55 *		
32	39	5,42		0,66	0,96	0,69 *		
33	40		0,30	0,95	1,38	0,72 *		
34	41	5,42		0,76	1,11	0,58 *		

(\*) regellose Beanspruchung



Getrennte Auswertung der 17 regellosen Vorgänge (Anlage A15 Nr. 18 bis 34) mit EREG /71/ und VNETZ1 /74/ in Klammern):

$u$	Erwart.-wert	Median	Streuspanne
$\sqrt{2}$	0,93	0,87	2,50 (2,35)
$u(\varphi)$	1,39	1,30	2,58 (2,38)
$u_B(\varphi, 1)$	1,29	1,15	3,49 (3,22)



Hauptprogramm:

```

C PROGRAMM SLEBE2          18.03.1985  JOENSSON
C SPEKTRALE LEBENSDAUER-BERECHNUNG MIT FFT OHNE GRAFIK
  DIMENSION B1(2050),B2(2050),A1(4,2),A2(4)
  DATA A2/4H-FEN,4HSTER,4HFUNK,4HTION/,A1/4HRECH,
  F4HBART,4H HAN,4H HAM,4HTECK,4HLETT,4HNING,4HMING/
  CALL FREMAT
15  FORMAT(V)
  WRITE(10,25)
25  FORMAT(//'PROGRAMM SLEBE2  18.03.1985'/)
  WRITE(10,35)
35  FORMAT('DATUM ?')
  READ(10,15) ITA,IMO,IJ
  WRITE(10,165)
165 FORMAT('WOEHLER-LINIE : K UND PHI ?')
  READ(10,15) RK,P
  1  WRITE(10,45)
45  FORMAT('BEISPIEL NR ?')
  READ(10,15) INB
  CALL F$OPN(30)
  WRITE(30,85) ITA,IMO,IJ,INB
85  FORMAT(/12X,'PROGRAMM SLEBE2',4X,I2,',',I2,',.19',I2,
  F4X,'BEISPIEL NR ',I3,/)
  CALL SGRAF(LUN,ST,B1,B2,TF,RK,P,IN,UB)
  IF(IN.EQ.0) GOTO 2
  WRITE(10,55)
55  FORMAT('ANZAHL DER MESSWERTE JE FFT-BLOCK ?')
  READ(10,15) NW
  WRITE(10,75)
75  FORMAT('TAKTZEIT IN MILLISEC=?')
  READ(10,15) TZ
  DT=TZ*0.001
  TMAX=(NW-1)*DT
  FMAX=1./(2.*DT)
  DF=2.*FMAX/NW
  2  WRITE(30,215) LUN,NW,ST,TMAX,TZ,FMAX,DF
215  FORMAT(/12X,'DATEN-FILE',I4,' MESSWERTE:',
  F15,/12X,'START-ADRESSE:',F7.0//12X,'TMAX=',F6.3,
  F' S TAKTZEIT',
  FF6.3,' MS'//12X,'FMAX=',F6.2,' HZ  DF=',F6.3,' HZ'//)
  WRITE(10,95)
95  FORMAT('FENSTERFUNKTION ?          NEIN= 0'/20X,
  F'RECHTECK= 1'/,20X,'BARTLETT= 2',/20X,
  F' HANNING= 3',/21X,'HAMMING= 4  ?')
  READ(10,15) JF
  FF=1.
  IF(JF.GT.1) FF=4.
  IF(JF.EQ.4) FF=3.43
  IF(JF.EQ.0) GOTO 5
  WRITE(30,105) (A1(JF,K),K=1,2),A2
105  FORMAT(/,12X,6A4,/)
  5  CALL PSD(NW,B1,B2,LUN,DT,JF,IV,IB,ST)
  FF=FF*FLOAT(1B-1V+1)
  N=NW/2+1
  B1(1)=FF*B1(1)/2.
  PG=0.
  DO 10 I=2,N
  B1(I)=2.*FF*B1(I*2-1)

```



```

F2=FLOAT(I-1)*DF
PG=PG+B1(I)*F2*F2
10 CONTINUE
T=TF/(UB*SQRT(PG))
WRITE(30,205) T
205 FORMAT(/12X,'SPEKTRALE LEBENSDAUER :',E14.7,' SEK.'//)
WRITE(30,145) INB
145 FORMAT(/12X,'ENDE PROGRAMM SLEBE2 NR.',I4//)
WRITE(10,155)
155 FORMAT('NEUES BEISPIEL ? 1=JA 0=NEIN')
READ(10,15) NBI
IF(NBI) 1,4,1
4 STOP
END
>>ERROR COUNT: 0000, PSECT SIZE: 0878, DSECT SIZE: 8248; REV. 8 00/00/
Gesamtprogramm-Stuktur siehe Anlage A4
Total Memory Requirements: 25 BF16, PGS: 00E816

```

Berechnung der Schädigungsgradientenfunktion:

```

SUBROUTINE SGRAF (LAN,T,X,Y,TF,RK,P,IN,UB)
DIMENSION X(1),Y(1),IY(200)
CALL FREMAT
15 FORMAT(V)
WRITE(10,45)
45 FORMAT('UMRECHNUNG WIEVIELER WERTE IN GRADIENTEN ?')
READ(10,15) AW
IF(AW.GE.1.) GOTO 14
IN=0
GOTO 1
14 A=AW
B=AW
IN=1
WRITE(10,25)
25 FORMAT('WERTE VON WELCHEM FILE HOLEN ?')
READ(10,15) LUN
WRITE(10,35)
35 FORMAT('START-ADRESSE ?')
READ(10,15) ST
CALL REKO (LUN,ST,AW,RK)
CALL FKUE (P,RK,UB)
CALL DIMAX(LUN,ST,B,M)
V=FLOAT(M)/200.
WRITE(10,55)
55 FORMAT('AUF WELCHEM FILE GRADIENTEN ABLEGEN ?')
READ(10,15) LAN
WRITE(10,35)
READ(10,15) S
T=S
WRITE(10,165)
165 FORMAT('MAX. SPANNUNG [MPA] ?')
READ(10,15) SMA
WRITE(10,155)
155 FORMAT('DAUERFESTIGKEIT [MPA] ?')
READ(10,15) SD
DM=SMA**P/RK

```

```

HS=DM
DO 30 I=1,16
DM=DM*10.
IF(DM.LT.160.) GOTO 30
L=I
GOTO 3
30 CONTINUE
3 DM=DM/10.
INU=L-1
FNU=FLOAT(INU)
FNU=10.**FNU
F=SMA/V
ID=0
IT=1
WRITE(30,95) SMA,V,RK,P,SD,A,LUN,ST
95 FORMAT(/12X,'SCHAEDIGUNGS-GRADIENTEN FUER SMAX=',
FF6.1,' MPA (' ,F6.3,' V)'/12X,
F'WOEHLERLINIE N=',E12.5,'*SIGMAX*-',F5.2/12X,
F'DAUERFESTIGKEIT:',F5.2,' MPA'/12X,
FF8.0,'WERTE VON FILE NR',I3,' AB START-ADRESSE',F8.0)
RKS=RK/FNU
RNT=0.
12 AW=AW-200.
IF(AW.GT.0.) GOTO 4
DW=AW+200.
GOTO 6
4 DW=200.
6 NW=DW.
IF(NW.LE.0) GOTO 7
CALL DLIR(LUN,1,NW,X,0.005,ST)
ST=ST+DW
DO 20 I=1,NW
SF=F*ABS(X(I))
Y(I)=SF**P/RKS
IF(X(I).LT.0.) Y(I)=ID*Y(I)
IF(SF.LT.SD) Y(I)=0.
20 CONTINUE
CALL DSRI(LAN,1,NW,Y,0.005,S)
IF(IT.EQ.0) GOTO 13
CALL DLII(LAN,1,NW,IY,S)
NZ=0
DO 10 I=2,NW
IF(ABS(IY(I-1)).GT.0) GOTO 11
IF(ABS(IY(I)).GT.0) GOTO 11
NZ=NZ+1
GOTO 10
11 IY(I-NZ)=IY(I)
10 CONTINUE
RNT=RNT+FLOAT(NZ)
NW=NW-NZ
CALL DSII(LAN,1,NW,IY,S)
DW=NW
13 S=S+DW
GOTO 12
7 RNT=A-RNT
TF=RNT/A
WRITE(30,135) RNT,TF
135 FORMAT(/12X,'TRANSIENT :',F8.0,' TF=',F7.3)
TF=FNU/TF
1 RETURN
END

```

Auf dem Daten-File 22 ab Start-Adresse 1 befinden sich 10 000 digitalisierte Beanspruchungswerte  $\sigma_i$  (normiert in  $V$ ) einer Funktion  $\sigma(t)$ :

Bildschirm:  $\delta$  SLEBE 2

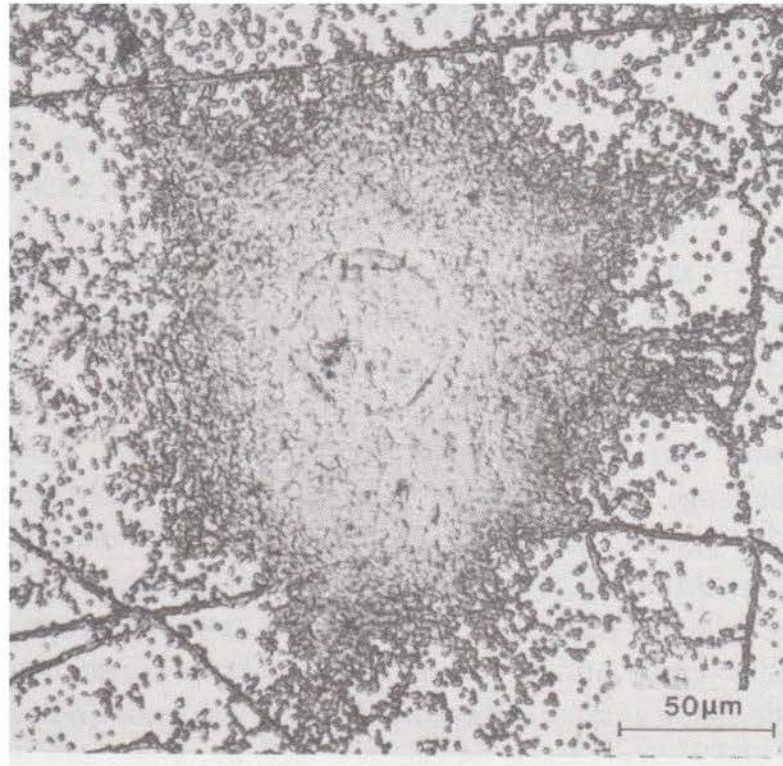
- Wöhlerlinie: K und PHI? 1.28E18, 5.73
- Umrechnung wievieler Werte in Gradienten? 10 000
- Werte von welchem File holen? 22 Startadresse 1
- Auf welchem File Gradienten ablegen? 22 Startadresse 50 000
- Max. Spannung /MPa/? 180
- Dauerfestigkeit /MPa/? 0
- Anzahl der Meßwerte je FFT-Block? 2048
- Taktzeit in Millisec. = ? 1,001
- Fensterfunktion? Nein  $\emptyset$
- Welche Blöcke? Von, bis 1, 2
- Neues Beispiel? Nein  $\emptyset$
- Stop, DBOS CC

Drucker:

```

PROGRAMM SLEBE2      15.10.1985      BEISPIEL NR  1
UB ( 5.73, 1.00) = 2.08 (Faktor  $u_B$  ( $\rho, i$ ): Text Gl.86 u. A2,
                        für Regellosigkeit  $i = 1,00$ )
SCHAEDIGUNGS-GRADIENTEN FUER SMAX= 180.0 MPA ( 8.775 V)
WOEHLERLINIE N= 0.12800E+19*SIGMA** - 5.73
DAUERFESTIGKEIT: 0.00 MPA
  10000.WERTE VON FILE NR 22 AB START-ADRESSE      1.
TRANSIENT :  4464. TF=  0.446 (Faktor  $t_F$ : Text Gl. 117)
DATEN-FILE  22  MESSWERTE: 2048 (je Zeitblock 2048 Werte)
START-ADRESSE: 50000.
TMAX= 2.049 S  TAKTZEIT 1.001 MS
FMAX=499.50 HZ  DF=  0.488 HZ (DF  $\hat{=}$   $\Delta f$ : Text Gl. 109)
LEISTUNGSSPEKTRUM:  BLOCK  1 BIS  2
SPEKTRALE LEBENSDAUER : 0.3643578E+05 SEK. ( $T_L$ : Gl 118)
gesamte Bearbeitungszeit:  2 min 50 sek. für die 10 000 Werte

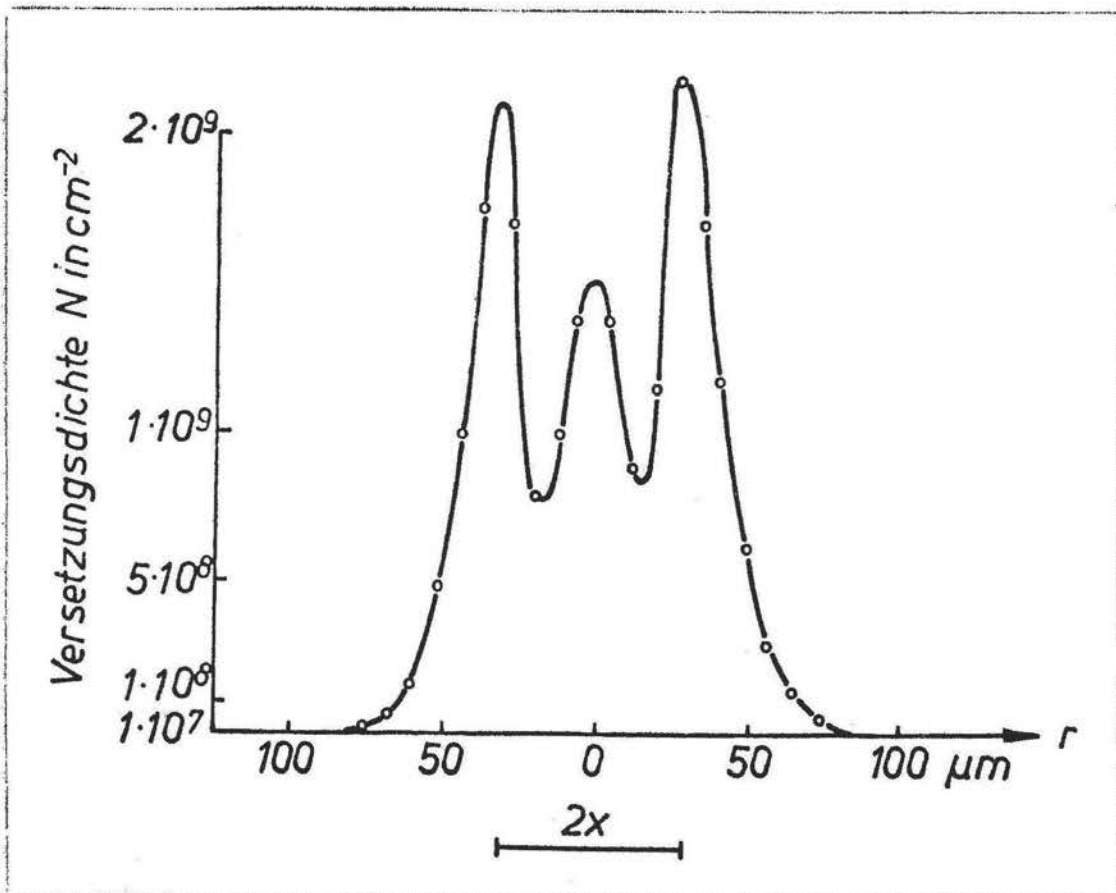
```



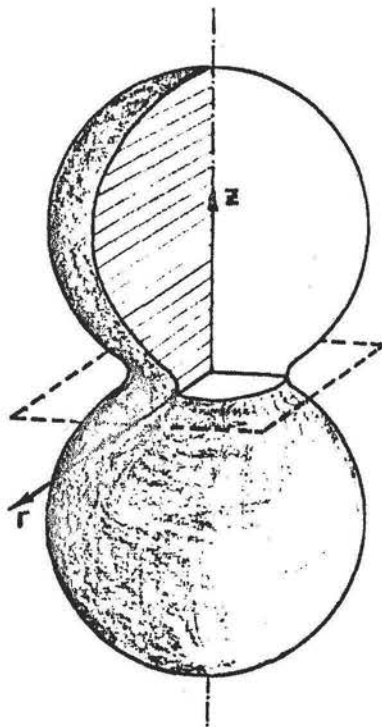
$t = 4h$

$T = 1000^{\circ}C$

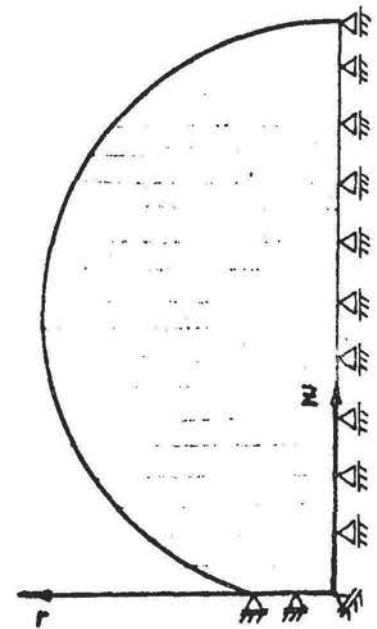
$\frac{M}{\rho} \approx 0,12$



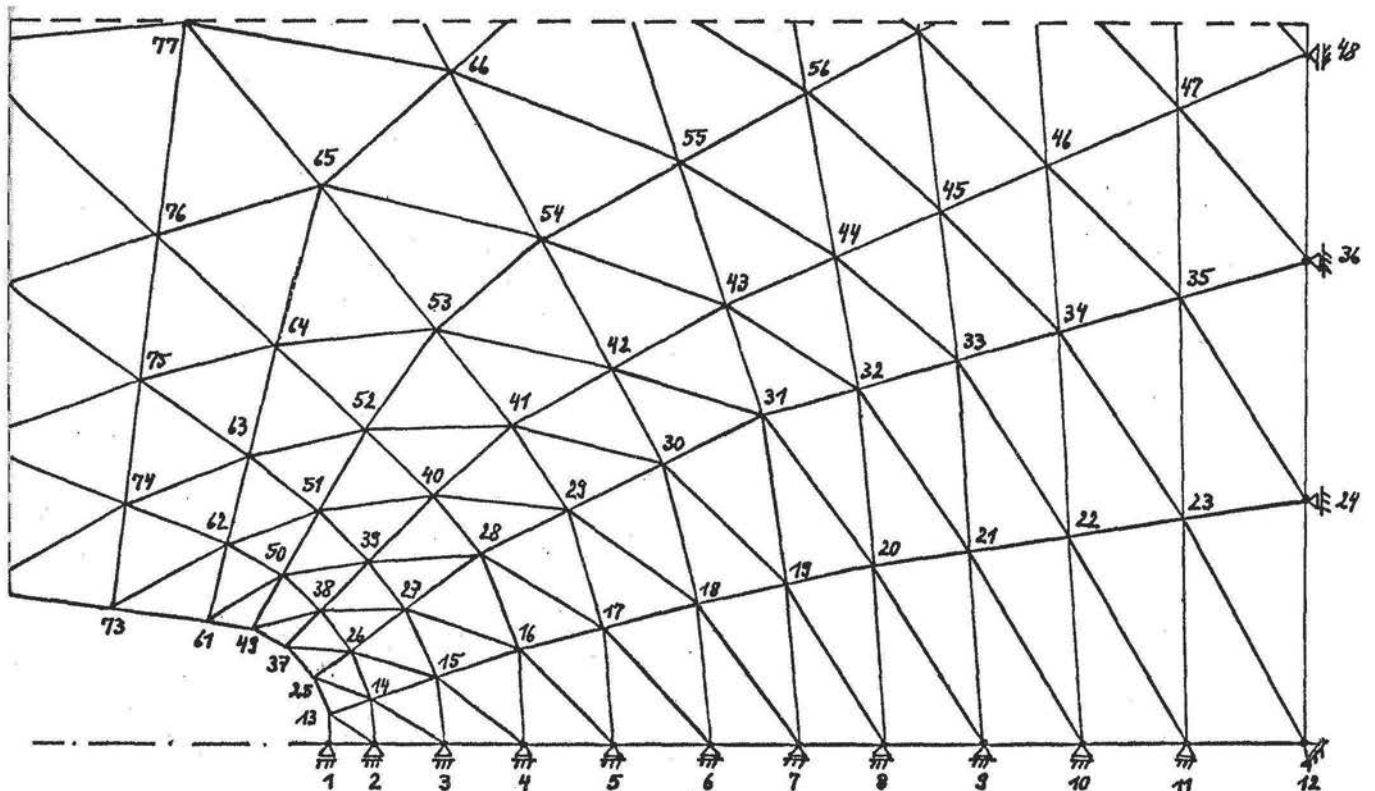
a)



b)



Beschreibung der Geometrie des Zweiteilchenmodelles durch ein symmetrisches Axialschnitt-Viertel



Schematische Darstellung der Vernetzung im Teilchenkontaktbereich

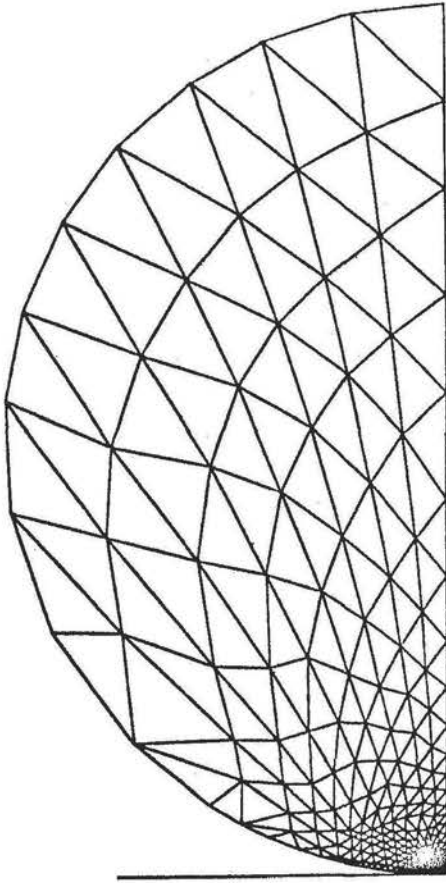


```
i 11
t19,t45,t35
?
i 13
integer i,j,t,es,k;
K:=0;
setoutput (3);
w1: es:=1;
?
```

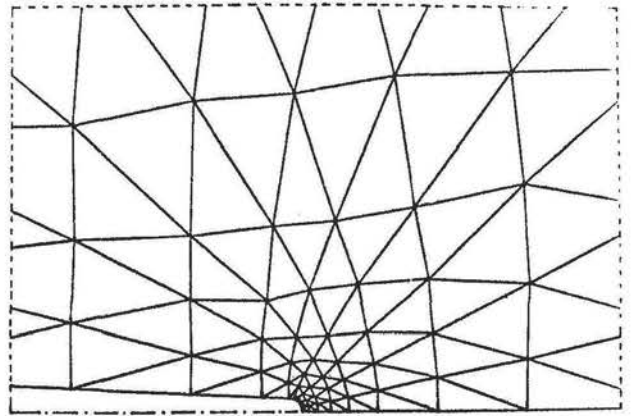
Legende:  $i1 = \sigma_r$   
 $i2 = \sigma_z$   
 $i4 = \tau_{rz}$  } in  $\text{kp/cm}^2$   
 $t19 = \tau_{uv}$  ( $f = 19^\circ$ ) in MPa  
setoutput (1): Lochstreifen-  
stanzer  
setoutput (3): Schnelldrucker

```
r 91 93
t19:= -(i1-i3)*0.3079+i4*0.6157;
if k=0 then
begin format ('? 1234 -1.12345E-12 -1.12345E-12 -1.12345
E-12 -1.12345E-12 -1.12345E-12 1.12345E-12 -1.12345
E-12);
print (i,i1,i2,i3,i4,i5,t19,rm,zm);
goto w2;
end;
if k=1 then
begin t45:= -(i1-i3)*0.5+i4;
t35:= -(i1-i3)*0.4699+i4*0.3420;
format ('? 1234 -1.12345E-12 -1.12345E-12);
print (i,t45,t35);
goto w2;
end;
if k=2 then
begin t19:=(-(i1-i3)*0.3079+i4*0.6157)/10.0;
if abs(t19) gt 99.0 then t19:=99.0;
Format ('-12.1234,');
print (t19);
goto w2;
end;
if k = 3 then
begin t45:=(-(i1-i3)*0.5+i4)/10.0;
if abs (t45) gt 99.0 then t45:=99.0;
Format ('-12.1234,');
print (t45);
goto w2;
end;
if k=4 then
begin t35:=(-(i1-i3)*0.4699+i4*0.3420)/10.0;
if abs (t35) gt 99.0 then t35:=99.0;
Format ('-12.1234,');
print (t35);
goto w2;
end;
w2: end i;
w3: k:=k+1;
if k=1 then
begin format ('???element tau/uv(45) tau/uv(35)?);
print (t45,t35);
goto w1;
end;
if k lt 5 then
begin setoutput (1); space (50);
goto w1;
end;
setoutput (3);
??
Ende der Korrektur
```

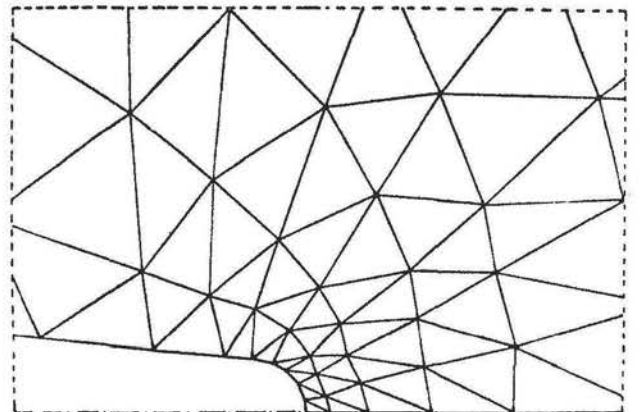
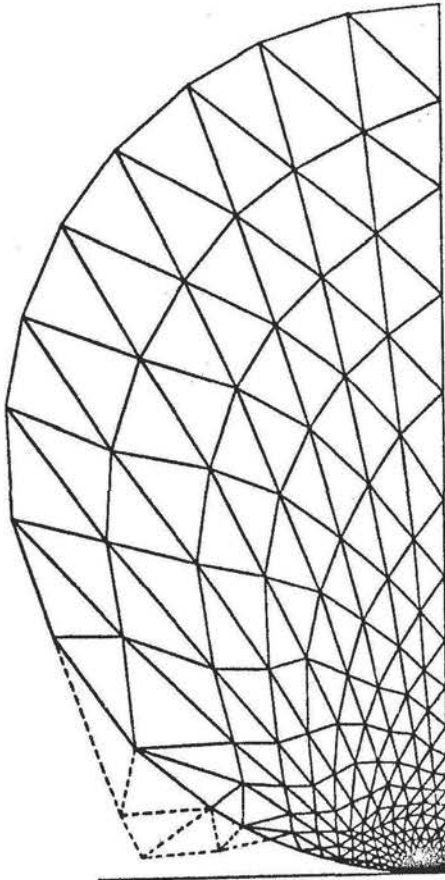
M1:



Ausschnitte gegenüber den  
Gesamtnetzen  
75-fach vergrößert:



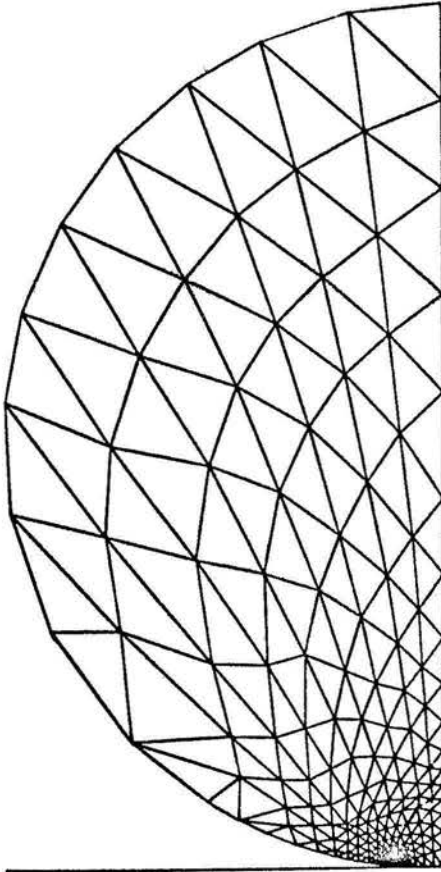
M2:



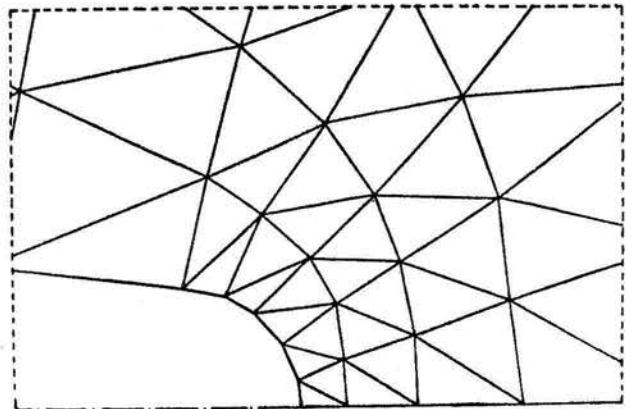
Modell M2 mit Nullelementen:



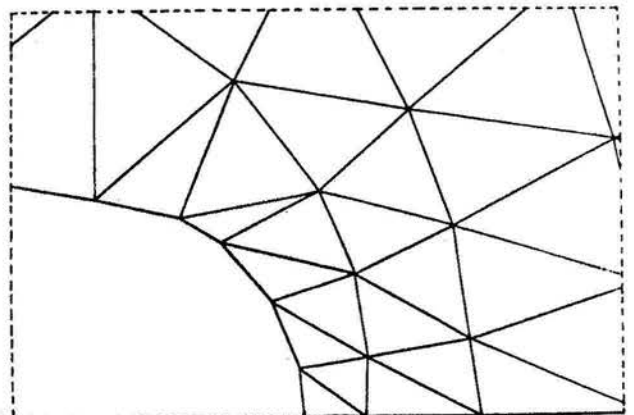
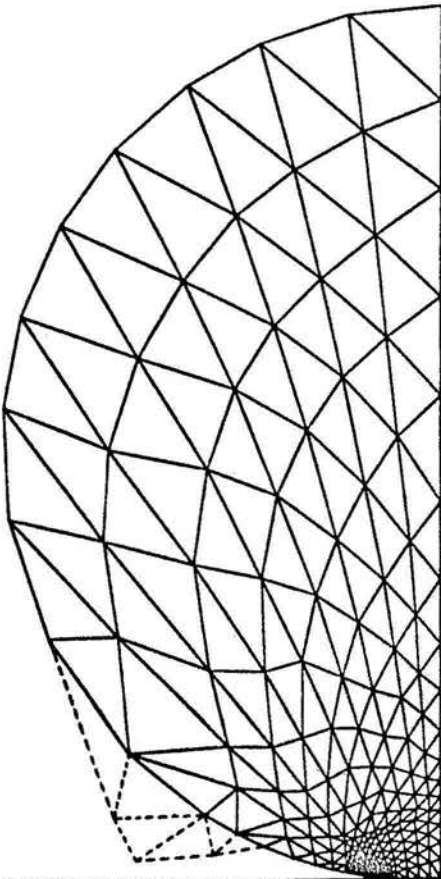
M3:



Ausschnitte gegenüber den  
Gesamtnetzen 75-fach vergrößert

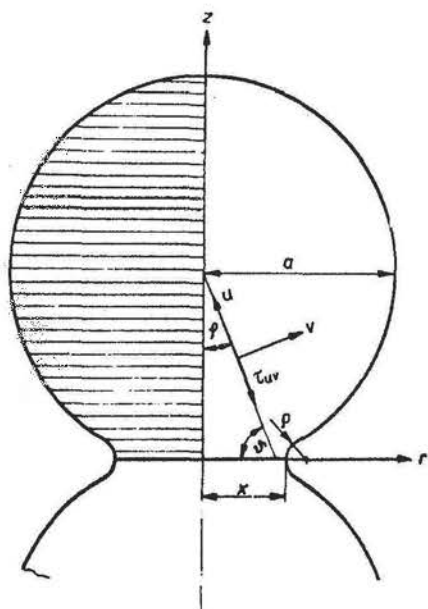


M4:

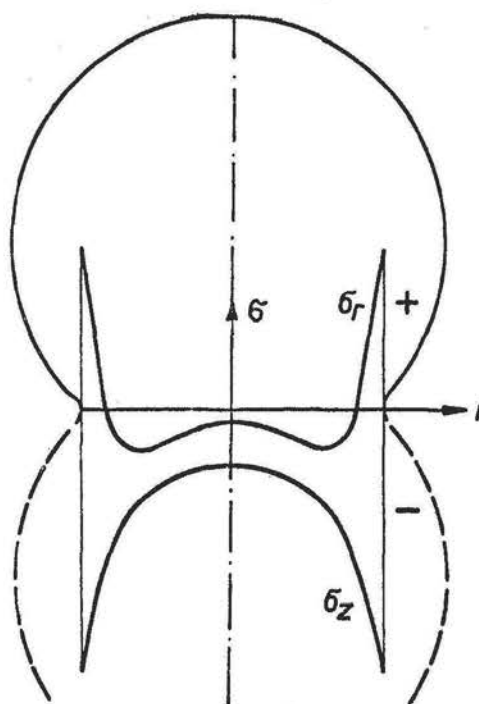


Modell M4 mit Nullelementen:

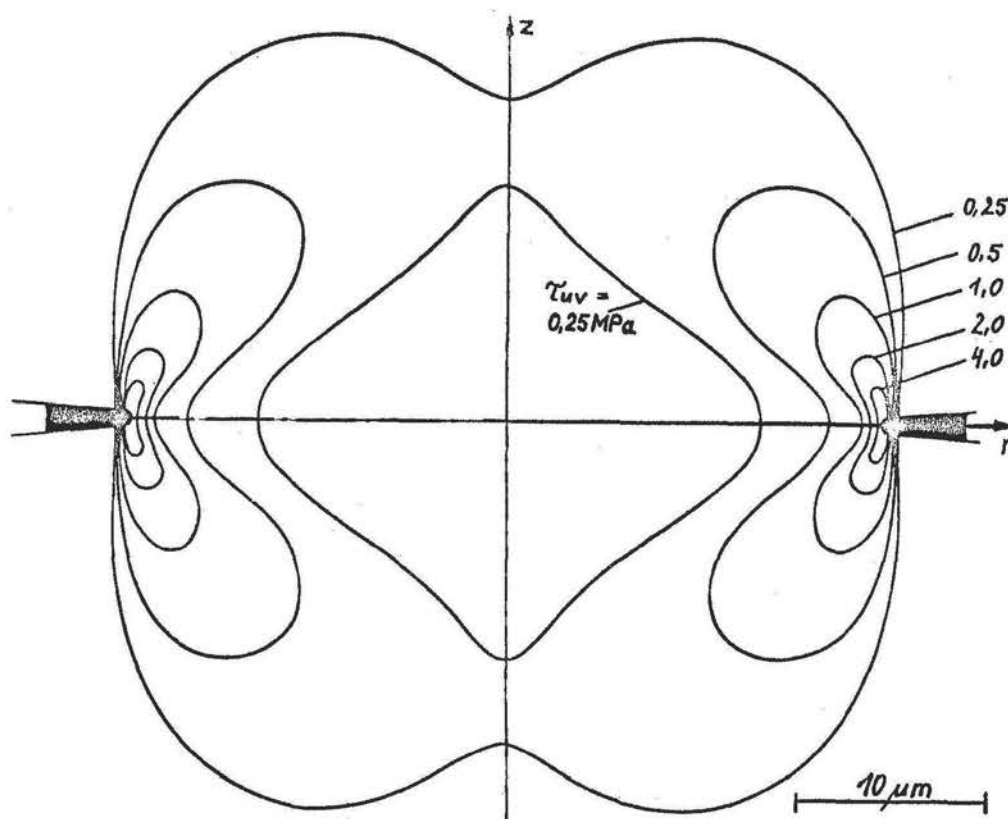




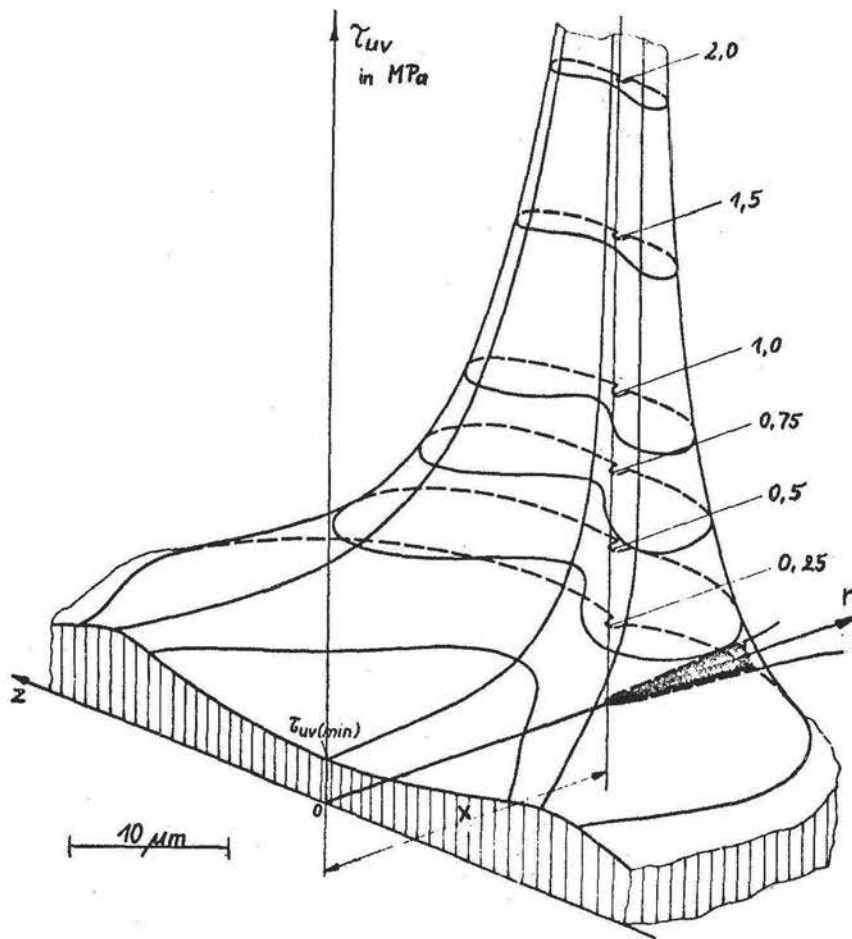
u-v-System im r-z-System



Normalspannungen  $\sigma_r, \sigma_z$  in der Kontakthalebene ( $z = 0$ )



$\tau_{uv}(r, z)$  für  $x/a = 0,08$  und  $\varphi = \psi = 45^\circ$

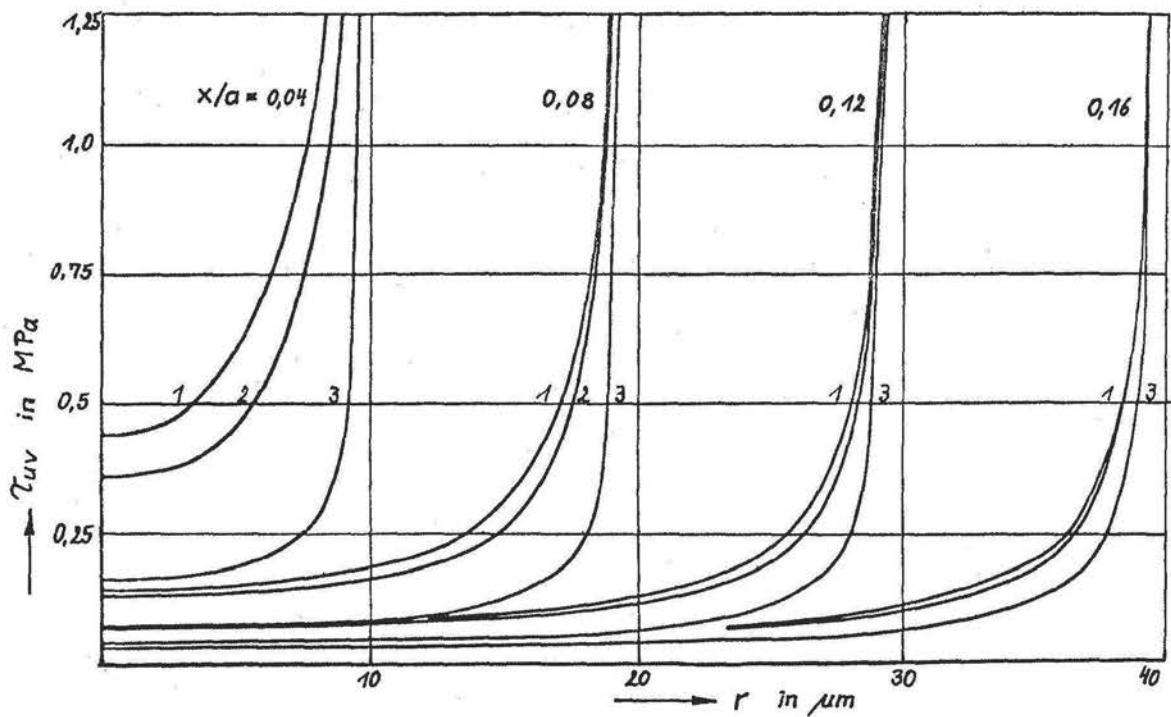


Modell M2

$$\frac{x}{a} = 0.08$$

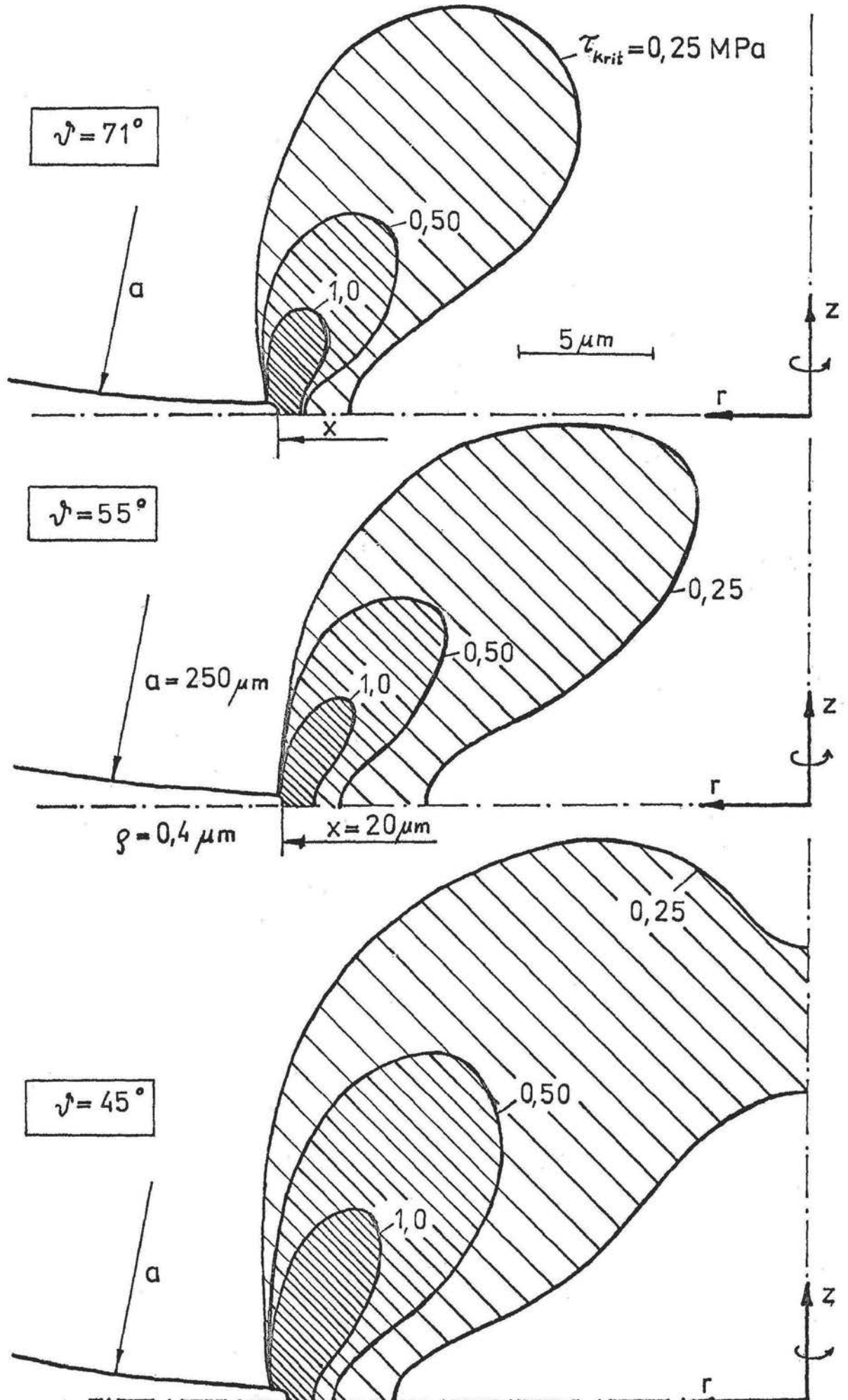
$$\phi = 45^\circ$$

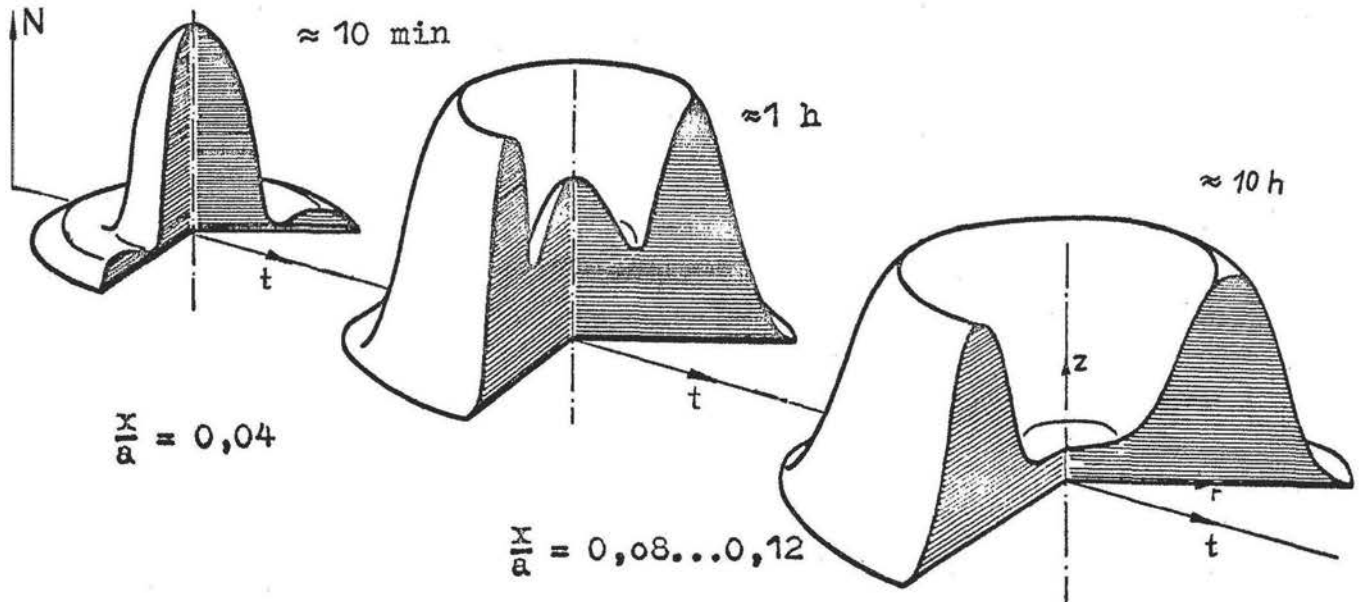
für  $z = 0$ :  $\tau_{uv}(r, z = 0)$



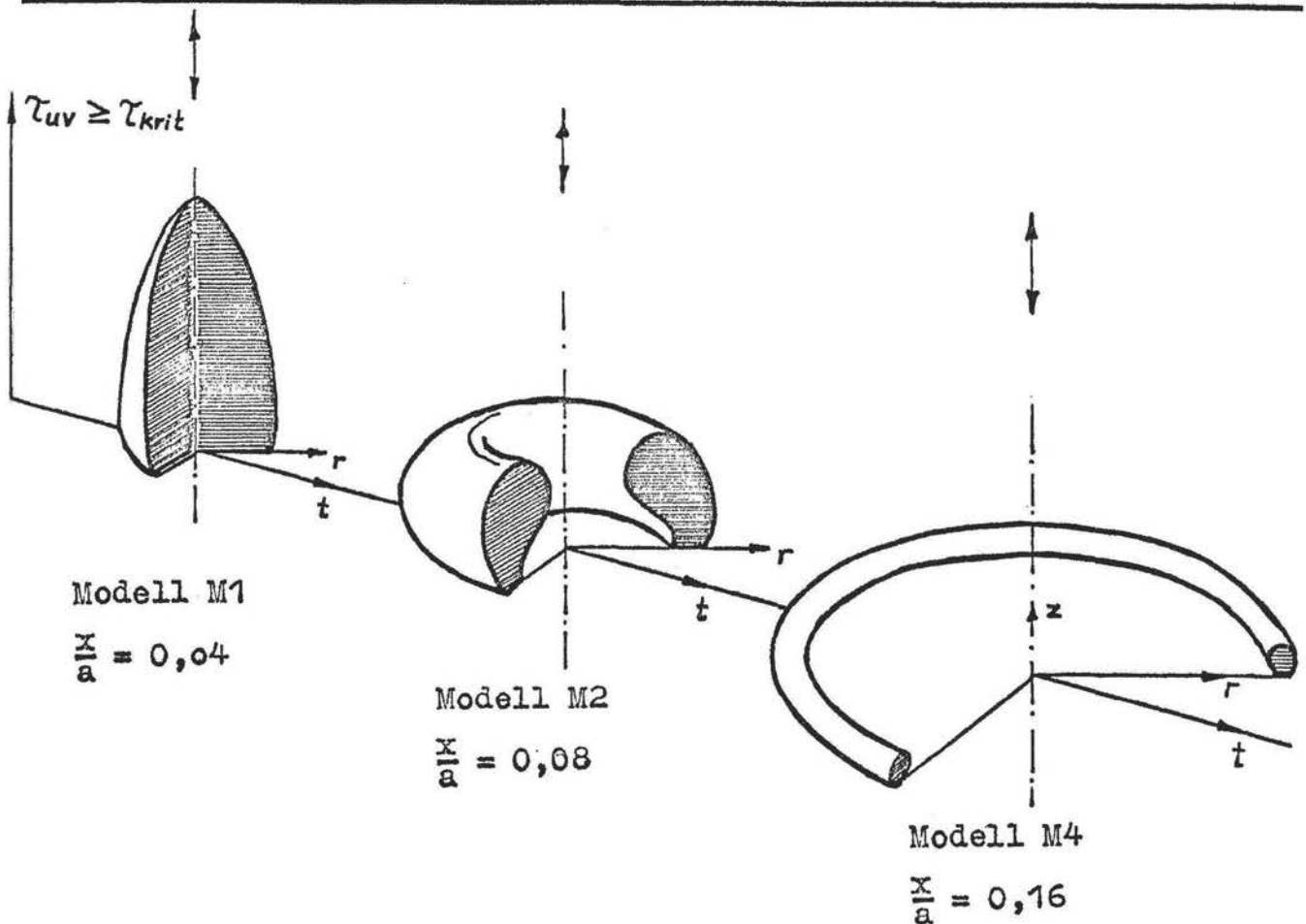
(1):  $\phi = 45^\circ$ , (2):  $\phi = 35^\circ$ , (3):  $\phi = 19^\circ$







Gemessene Versetzungsdichteverteilungen im Kontaktbereich monokristalliner Kugel-Platte-Sinterpartner /118/



Mit FEM berechnete  $\tau_{uv}$ -Verteilung der Zweikugel-Modelle M1 bis M4 für  $\nu = 71^\circ$  (aktivierbare Volumina mit  $\tau_{krit} = 0,25$  MPa)

Thesen zur Dissertation B:

"Neue Anwendung schneller Fouriertransformation in der Betriebsfestigkeit und finiter Elemente in der Sintertheorie"

vorgelegt von Dr.-Ing. Dieter Joensson

Die Dissertation besteht aus zwei selbständigen Teilen.

Thesen zum Teil I: Spektralanalytische Lebensdauerberechnung regellos schwingend beanspruchter Bauteile mit FFT

- 1.) Bisher war es nicht möglich, Lebensdauerberechnungen allein auf spektralanalytischer Grundlage auszuführen.
- 2.) In der vorliegenden Arbeit wird nachgewiesen, daß verschiedene analytisch geschlossene Berechnungsansätze für die Lebensdauer auf die folgende Form zurückführbar sind:

$$N_M = \frac{1}{L\{f_1(\hat{\sigma})\} \cdot \sigma_{eff}^p} \quad (1)$$

mit  $N_M$ : Lebensdauer nach Palmgren/Miner;  $L\{f_1(\hat{\sigma})\}$ : Funktionsterm in Abhängigkeit der eindimensionalen Wahrscheinlichkeitsdichte der Maxima  $\hat{\sigma}$ ;  $\sigma_{eff}$ : Effektivwert aller momentanen Beanspruchungswerte  $\sigma(t)$ ;  $p$ : Wöhlerlinienexponent

Neben dem spektralanalytisch zugänglichen Effektivwert ist also stets die Kenntnis der Amplitudenverteilung unerlässlich, um die Lebensdauer  $N_M$  zu ermitteln. Für die Bereitstellung der Verteilungsfunktion ist eine Auswahl und Schädigungsbewertung ausgezeichneter Punkte der Beanspruchungs-Zeit-Funktion üblich. Infolge dieser Auswahlmöglichkeit entstand bisher eine große Zahl verschiedener ein- und zweiparametrischer Klassierverfahren.

Liegt das Klassierergebnis digital vor, dann kann jedoch die Lebensdauer  $N_M$  direkt über die Palmgren/Miner-Summenformel berechnet werden - ohne spektrale Angaben. Demzufolge wird gegenwärtig die Spektralanalyse in der Betriebsfestigkeit nur zur Gewinnung zusätzlicher Prozeßinformationen eingesetzt.

- 3.) Es wird gezeigt, daß die Palmgren/Miner-Summenformel einen arithmetischen Mittelwert von "Stufen-Schädigungsgradienten"  $\Delta D_K = 1/N_K$  ( je Stufe K) darstellt:

$$N_M = \frac{1}{\Delta D_K} \quad (2)$$

Gemäß Gl. (1) ist der arithmetische Mittelwert nur spektral-analytisch berechenbar, wenn gleichzeitig Informationen zur Verteilungsfunktion vorliegen.

- 4.) Der quadratische Mittelwert aller Amplituden  $x_K$  einer Sinus-Blockfunktion  $x(t) = x_K \cdot \sin \omega t$  mit variiertem  $x_K$  steht in einem verteilungsfreien Zusammenhang zum Effektivwert aller Momentanwerte dieser Funktion:

$$\overline{x_K^2} = \sqrt{2} \cdot x_{eff} \quad (3)$$

- 5.) Es wird deshalb vorgeschlagen, an Stelle des arithmetischen Mittelwertes  $\overline{\Delta D_K}$  in (2) einen quadratischen Mittelwert zu verwenden:

$$N_L = \frac{1}{\overline{\Delta D_K^2}} \leq N_M \quad (4)$$

- 6.) Speziell für Schmalbandprozesse entsteht aus (4) folgende Summenformel:

$$N_L = \sqrt{\frac{\sum n_K}{\sum \frac{n_K}{N_K^2}}} \quad (5)$$

Hier wird im Unterschied zur Palmgren/Miner-Formel die Schädigungsarbeit  $n_K/N_K$  zusätzlich auf die Zeit  $N_K$  bezogen, d. h. der Ansatz (4) ist als Akkumulation von "Schädigungsleistungen" interpretierbar.

- 7.) Der quadratische Mittelwert in (4) kann analog zu (3) in einen verteilungsunabhängigen Faktor  $u$  und einen Effektiv-

wert  $\Delta D_{\text{eff}}$  zerlegt werden:

$$N_L = \frac{1}{u \cdot \Delta D_{\text{eff}}} \quad (6)$$

- 8.)  $\Delta D_{\text{eff}}$  muß notwendig aus momentanen Schädigungsgradienten  $\Delta D(t)$  berechnet werden. Eine derartige Funktion entsteht, wenn jedem Beanspruchungswert  $\sigma(t)$  über die Wöhlerliniengleichung  $N(\sigma)$  ein momentaner Schädigungsgradient  $\Delta D(t)$  zugeordnet wird. Z. B. gilt für die Geradengleichung  $N(\sigma)$  im  $\log \sigma - \log N$ -System:

$$\Delta D(t) = \frac{1}{K_W} \cdot [\sigma(t)]^p \quad (7)$$

mit  $K_W$ : Wöhlerlinienkonstante;  $p$ : Wöhlerlinienexponent. Die Funktion  $\Delta D(t)$  sei als "Schädigungsgradientenfunktion" bezeichnet.

- 9.) Der Effektivwert beinhaltet die spektralen Leistungen für alle Frequenzen:

$$\Delta D_{\text{eff}} = \sqrt{\int_0^{\infty} \tilde{G}_{\Delta D}(f) df} \quad (8)$$

Die einseitige Spektraldichtefunktion  $\tilde{G}_{\Delta D}(f)$  folgt hier aus der Fouriertransformation der Schädigungsgradientenfunktion  $\Delta D(t)$ .

- 10.) Die Lebensdauer  $N_L$  nach Gl (6) kann somit durchgängig spektralanalytisch berechnet werden, ohne Informationen über bestimmte Verteilungen zu benötigen. Für Breitbandprozesse ist die Zerlegung der Schwingspiele  $N$  in Zeit und Frequenz erforderlich. Daraus folgt die Lebensdauerzeit  $T_L$  (in Sekunden):

$$T_L = \frac{1}{u \cdot \sqrt{\int_0^{\infty} \tilde{G}_{\Delta D}(f) \cdot f^2 df}} \quad (9)$$

- 11.) Der Faktor  $u$  hat jetzt nicht mehr den Wert  $\sqrt{2}$  wie in Gl. (3), weil die Schädigungsgradienten  $\Delta D(t)$  mit  $p$  potenzierte Sinusfunktionen darstellen. Für Schmalbandprozesse gilt exakt:

$$u^2 = u^2(p) = p! / \prod_{\ell=1}^p (\ell - \frac{1}{2}) \geq 2 \quad (10)$$



und für Breitbandprozesse entsteht eine vom Regellosigkeitskoeffizienten  $i$  abhängige Näherungsformel:

$$u_B^2(\tau, i) = \frac{\prod_{\ell=1}^p (2\ell - 1 + i^2)}{\prod_{\ell=1}^p (2\ell - 1)} = u^2 \quad (11)$$

- 12.) Die Spektraldichte  $\tilde{G}_{\Delta D}$  in Gl (9) ist nur für Sonderfälle analytisch ermittelbar. Eine allgemein gültige Berechnung kann jedoch für diskrete Beanspruchungswerte realisiert werden. Infolge einer Digitalisierung entsteht aus (9):

$$T_L = \frac{1}{u_B(\tau, i) \cdot \sqrt{\sum_{\ell=1}^p G_{\Delta D_\ell}(f_\ell) \cdot f_\ell^2}} \quad (12)$$

- 13.) Zur Ermittlung der Lebensdauer  $T_L$  nach Gl. (12) wurde das FORTRAN-Programm SLEBE geschrieben. Die diskreten Spektralleistungen  $G_{\Delta D_1}(f_1)$  werden dabei mit schneller Fouriertransformation berechnet. Somit wird erstmalig diese Fouriertransformation auf Funktionen  $\Delta D(t)$  angewendet, die bereits das Schädigungsvermögen des Bauteiles beinhalten.
- 14.) Zur Lebensdauerberechnung für 34 verschiedene, experimentell geprüfte Beanspruchungsverläufe wurde das SLEBE-Programm bzw. Gl. (5) eingesetzt.
- Im Vergleich zu den Versuchswerten entstanden Schadenssummen mit folgenden Kennwerten: Erwartungswert 1,26 und Streuspanne 6,23 für den Faktor  $u = u_B(\tau, i)$ .

Thesen zu Teil II: Berechnung räumlicher Spannungen in den Gleitebenen von Zweiteilchen-Sintermodellen mit FEM

- 15.) Bisher war es nicht möglich, die Bildung hoher Versetzungsdichte im Teilchenkontaktbereich freiwillig sinternder Pulverteilchen zweifelsfrei durch einen einfachen Mechanismus zu erklären.
- 16.) Beim "freiwilligen" Sintern, d. h. ohne äußeren Preßdruck, schwindet und verdichtet sich das disperse Sinterformteil nur durch Einwirkung der Laplaceschen Kapillarspannungen, die durch Oberflächenkrümmung entstehen. Es existiert also eine enge Wechselbeziehung zwischen Geometrie und Belastung der einzelnen Pulverteilchen.
- 17.) Wird ein Versetzungsmultiplikations-Mechanismus vom Typ der FRANK-READ-Quelle vorausgesetzt, so induzieren die außen angreifenden Oberflächenkräfte im Innern der Pulverteilchen Schubspannungen auf den kristallinen Gleitebenen. Damit jedoch diese Schubspannungen vorhandene Versetzungsquellen aktivieren können, müssen sie die Versetzungs-Quellenspannung  $\gamma_{\text{Krit}}$  des Werkstoffes übersteigen und soweit reichen, daß Versetzungssegmente ausgebaucht werden können. Jede Versetzungsvervielfachung erfordert also ein aktivierbares Volumen bestimmter Ausdehnung.
- 18.) Aktivierbare Volumina für reale Sintersysteme wurden bisher noch nicht berechnet; auch nicht für theoretisch übliche rotationssymmetrische Zweikugel-Sintermodelle.
- 19.) In der vorliegenden Arbeit wird ein Berechnungsmodell für Zweikugel-Sintersysteme vorgeschlagen, bei dem die Gleitebenen in Form rotationssymmetrischer Kegelmantelflächen im Innern der Pulverteilchen idealisiert sind. Damit kann das echt räumliche Problem auf ein quasi-ebenes reduziert werden, so daß eine Berechnung mit vertretbarem Aufwand möglich ist.
- 20.) In Abhängigkeit vom rotationssymmetrischen Spannungstensor entstehen auf den als Kegelmantelflächen idealisierten Gleit-

ebenen folgende Schubspannungen:

$$\tau_{uv}(\varphi) = (\sigma_r - \sigma_z) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \tau_{rz} \cdot \cos 2\varphi \quad (13)$$

Diese Schubspannungen sind abhängig vom Winkel  $\varphi$  der Kegelmantelfläche zur Rotationsachse  $z$  bzw. vom Winkel  $\psi = 90^\circ - \varphi$  zur Kontaktebene  $z = 0$ .

- 21.) Zur Berechnung des Spannungstensors wurde ein vorhandenes FEM-ALGOL-Programm für elastische rotationsymmetrische Festkörper genutzt, das finite Dreieckringelemente mit linearem Verschiebungsansatz verwendet. Durch eine Programmkorrektur wurde für jedes finite Element die zusätzliche Berechnung der Schubspannung  $\tau_{uv}$  nach Gl. (13) für drei verschiedene Winkel  $\varphi$  veranlaßt.
- 22.) Um die zeitabhängige Veränderung der räumlichen Schubspannungsverteilungen zu erfassen, wurden vier geometrische Varianten M1 bis M4 des Zweikugel-Sintermodelles in finite Elemente zerlegt, die vier charakteristischen Sinterzeiten entsprechen. Die Modelle M1 bis M4 sind durch sehr unterschiedliche Halskrümmungsradien und Halsdurchmesser gekennzeichnet, so daß unterschiedlich feine FEM-Vernetzungen erforderlich waren (mindestens 374 und maximal 506 Elemente).
- 23.) Zur Ermittlung der aktivierbaren Volumina wurde ein vorhandenes Grafik-Programm zum Zeichnen der FEM-Netze so modifiziert, daß nur die Elemente gezeichnet werden, für die die Beziehung  $\tau_{uv} \geq \tau_{\text{Krit}}$  (These 17) gilt.
- 24.) Die mit finiten Elementen berechneten aktivierbaren Volumina wurden mit gemessenen Versetzungsdichteverteilungen verglichen. Die Messungen erfolgten vorher von anderen Autoren aus technischen Gründen an Kugel-Platte-Sinterpartnern, die Berechnung jedoch für Zweikugel-Sintermodelle. Die Ergebnisse sind trotzdem vergleichbar, weil sich in beiden Fällen die typische, stark gekrümmte Sinterhalszone und die daraus resultierende Kapillarbeanspruchung ausbildet.
- 25.) Die berechneten aktivierbaren Volumina korrelieren sehr gut mit den experimentell ermittelten Versetzungsdichtevertei-

lungen. Die Maxima der Versetzungsdichte wandern mit zunehmender Sinterdauer ebenso wie die berechneten aktivierbaren Volumina als ringwallförmige Erhebungen nach außen.

26.) Nach diesen Ergebnissen kann die große Geschwindigkeit und der große Betrag der Formänderung beim freiwilligen Sintern über den Frank-Read-Mechanismus interpretiert werden. Der mit der FEM-Berechnung nachgewiesene Zusammenhang zwischen aktivierbaren Volumina und Versetzungsdichteverteilungen erlaubt Rückschlüsse auf die Wirkung folgender Parameter, die den Sinterprozeß maßgeblich beeinflussen:

- Höhe der Versetzungs-Quellenspannung  $\tau_{\text{Krit}}$  des Werkstoffes
- Teilchengröße
- kristallografische Orientierung der Sinterpartner zueinander
- Sintertemperatur

Damit sind Ansatzpunkte gegeben, um gezielt in den pulvermetallurgischen Fertigungsprozeß eingreifen zu können.

27.) Die Untersuchungen erfolgten für freiwillig sinternde Kupfer-Pulverteilchen. Die Ergebnisse sind aber auch auf andere kristalline Materialien und auf gepreßte Sinterformteile anwendbar.