

ISSN 0863-0755



**WISSENSCHAFTLICHE SCHRIFTENREIHE**  
der Technischen Universität  
Karl-Marx-Stadt 4/1989

**FESTIGKEITSBERECHNUNG  
UND SCHWINGUNGSANALYSE  
MIT DEM  
FEM-PROGRAMMSYSTEM  
GITRA 3**

FESTIGKEITSBERECHNUNG UND SCHWINGUNGSANALYSE  
 MIT DEM FEM-PROGRAMMSYSTEM G I T R A 3

Dr. sc. techn. D. Joensson  
 Sektion Maschinen-Bauelemente  
 Bereich Mechanik

**Verfasser:**

**Dr. sc. techn. Dieter Joensson, Sektion Maschinen-  
Bauelemente, Bereich Mechanik der Technischen Uni-  
versität Karl-Marx-Stadt, Postfach 964,  
Karl-Marx-Stadt, 9010 DDR**

**Redaktionsschluß: 31. 1. 1989**

**Herausgeber: Der Rektor der Technischen Universität  
Karl-Marx-Stadt**

**Redaktion: Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen  
Universität Karl-Marx-Stadt, Postfach 964,  
Karl-Marx-Stadt, 9010 DDR**

**Druckgenehmigungsnummer: K114/89**

**Gesamtherstellung: VEB Kongreß- und Werbedruck Oberlungwitz**

## Inhaltsverzeichnis

	Seite	
1.	Einleitung	1
2.	Einige Grundlagen zur FEM mit Verschiebungsansätzen	4
2.1.	Verschiebungen als Hauptunbekannte	4
2.2.	Das Gleichungssystem für ein finites Element	8
2.3.	Einfache Beispiele	11
2.3.1.	Dreieckelement mit 3 Knoten	11
2.3.2.	Dreieckelement mit 6 Knoten	14
2.3.3.	Balken in der Ebene	15
2.4.	Das große Gleichungssystem für die Struktur	17
2.4.1.	Formale Herleitung	17
2.4.2.	Praktische Realisierung des Strukturgleichungssystems	18
2.4.3.	Bandbreite, Bandweite und Profil der Struktursteifigkeitsmatrix	21
2.4.4.	Koordinatentransformation vom EKS ins SKS	25
2.4.5.	Berücksichtigung fester und teilverschieblicher Lager	28
2.4.6.	Umrechnung beliebiger Belastung auf Knotenbelastungen im SKS	29
2.5.	Arbeitsweise eines FEM-Programmes für Verschiebungen	32
2.6.	Spannungsverteilungen in Flächenelementen	33
2.7.	Genauigkeit der berechneten Lösungen	35
2.8.	Anwendung der FEM auf Schwingungsprobleme	39
2.8.1.	Das Bewegungs-Differentialgleichungssystem für ungedämpfte Schwingungen	39
2.8.2.	Eigenwertberechnung für ungedämpfte Schwingungen	41
2.8.3.	Erzwungene gedämpfte Schwingungen	45
3.	Die Elemente in GITRA3	49
3.1.	Timoshenko-Balken	49
3.1.1.	Elementsteifigkeitsmatrix	49
3.1.2.	Elementmassenmatrix	51
3.2.	Masseloses Federelement	53
3.3.	Masseloses Starrelement	54

	Seite	
3.4.	Dünnwandiges Dreieckelement	55
3.4.1.	Elementsteifigkeitsmatrix	56
3.4.1.1.	Elementsteifigkeitsmatrix $\underline{C}_e^S$ für die Scheibe	57
3.4.1.2.	Elementsteifigkeitsmatrix $\underline{C}_e^P$ für die Platte	58
3.4.2.	Elementmassenmatrix	58
3.5.	Dünnwandiges Viereckelement	59
3.6.	Diskretes Masseelement	61
4.	Hinweise zu einigen Algorithmen in GITRA3	62
4.1.	Schnittkräfte und -momente im Modul GITSK	62
4.2.	Spannungen der Flächenelemente im Modul GITSP	63
4.3.	Modale Reduktion im Modul GITFG	64
	Literaturverzeichnis	67
	Anlage: Anwendungsbeschreibung	70

## 1. Einleitung

Das Finite-Element-Programmsystem GITRA (Grafisch interaktive Tragwerksanalyse) wurde vor etwa 15 Jahren in der Sektion Maschinen-Bauelemente der TH Karl-Marx-Stadt begründet und seither ständig weiterentwickelt.

Zu Beginn wurden eindimensionale finite Elemente verwendet /1/, /2/. Später erfolgte die Erweiterung auf Flächenelemente in GITRA II /3/. 1986 wurde im Lehrstuhl Strukturtechnik der Sektion Maschinen-Bauelemente unter Leitung von Prof. Dr. sc. techn. F. Erfurt eine dritte GITRA-Version für Personalcomputer konzipiert und seit dieser Zeit schrittweise das Programmsystem GITRA3 aufgebaut. In GITRA3 konnten einerseits bewährte Algorithmen des Großrechnerprogramms GITRA II übernommen werden, andererseits jedoch wurde ein völliger Neuaufbau mit zahlreichen Neuentwicklungen realisiert, insbesondere zur Computergrafik. Im neuen Programmsystem werden die Vorteile des Personalcomputers durch den konsequent modularen Aufbau optimal genutzt /4/.

GITRA3 berechnet statische und dynamische Verformungen, Schnittreaktionen und Spannungen für räumliche, dünnwandige Flächentragwerke in Kombination mit Balken beliebiger Querschnitte, Federn, Masse- und Starrelementen. Beispiele für Anwendungen zeigt Bild 1.

Zur Implementierung des gesamten Programmsystems auf einem Personalcomputer des Nutzers genügen zur Zeit vier 360 KByte-Disketten. Voraussetzung für eine umfassende Nutzung von GITRA3 ist ein Arbeitsspeicher von mindestens 500 KByte, ein externer Plattenspeicher  $> 1$  MByte, neben dem normalen Bildschirm zusätzlich ein Grafik-Farbterminal, sowie ein Plotter.

Die Anwendungsbeschreibung ist in diesem Heft als Anlage enthalten und sollte vom Leser zuerst gelesen werden, weil sie den gegenwärtigen Leistungsumfang und den aktuellen Aufbau des Programmsystems repräsentiert.

Das vorliegende Heft wurde hauptsächlich für Nutzer geschrieben, die bisher noch wenig Umgang mit der Finite-Element-

Methode (PEM) hatten. Die theoretischen Grundlagen wurden relativ ausführlich dargestellt, um die Möglichkeiten und Grenzen des Programmsystems transparent zu machen.

Natürlich kann in diesem Heft nicht jeder in GITRA3 verwendete Algorithmus detailliert beschrieben werden (das Programmsystem beinhaltet zur Zeit mehr als 18 000 FORTRAN-Anweisungen allein für die Grundmodule); hier muß ein Überblick genügen.

Programmentwickler von GITRA3 sind:

Dipl.-Ing. Joachim L i e b e r s , Dr.-Ing. Annette B o b e  
(VEB Nadel- und Platinenfabrik Karl-Marx-Stadt), Dr.-Ing.

Wolfgang T i e t z (Forschungszentrum des Kombines "Fritz Heckert" Karl-Marx-Stadt), Dipl.-Ing. Bernd F i n d e i s e n ,  
sowie der Autor.

Spezielle Programmentwicklungen wurden von

Dipl.-Ing. Carsten S t r e l l e r , Doz. Dr. sc. techn.  
Werner G u m p e r t und Student Peter R i c h l i n g  
realisiert.

Die Kollegen Dr. sc. nat. Arnd M e y e r und Dr. rer. nat.  
Mathias P e s t e r der Sektion Mathematik haben effektive  
Algorithmen für Gleichungssysteme und Eigenwertprobleme ge-  
liefert.

Weiterhin leisteten die Kollegen der Sektion Maschinen-Bau-  
elemente Dipl.-Ing. Jörg M ü g l i t z im Lehrstuhl Ge-  
triebetechnik, Dipl.-Ing. Lutz K l i n g b e i l im Lehr-  
stuhl Konstruktionstechnik, Dr.-Ing. Roland V o g e l in  
der Lehrgruppe Technische Mechanik, sowie Dr.-Ing. Armin  
F r e u n d im Institut für Mechanik Beiträge zu GITRA3.

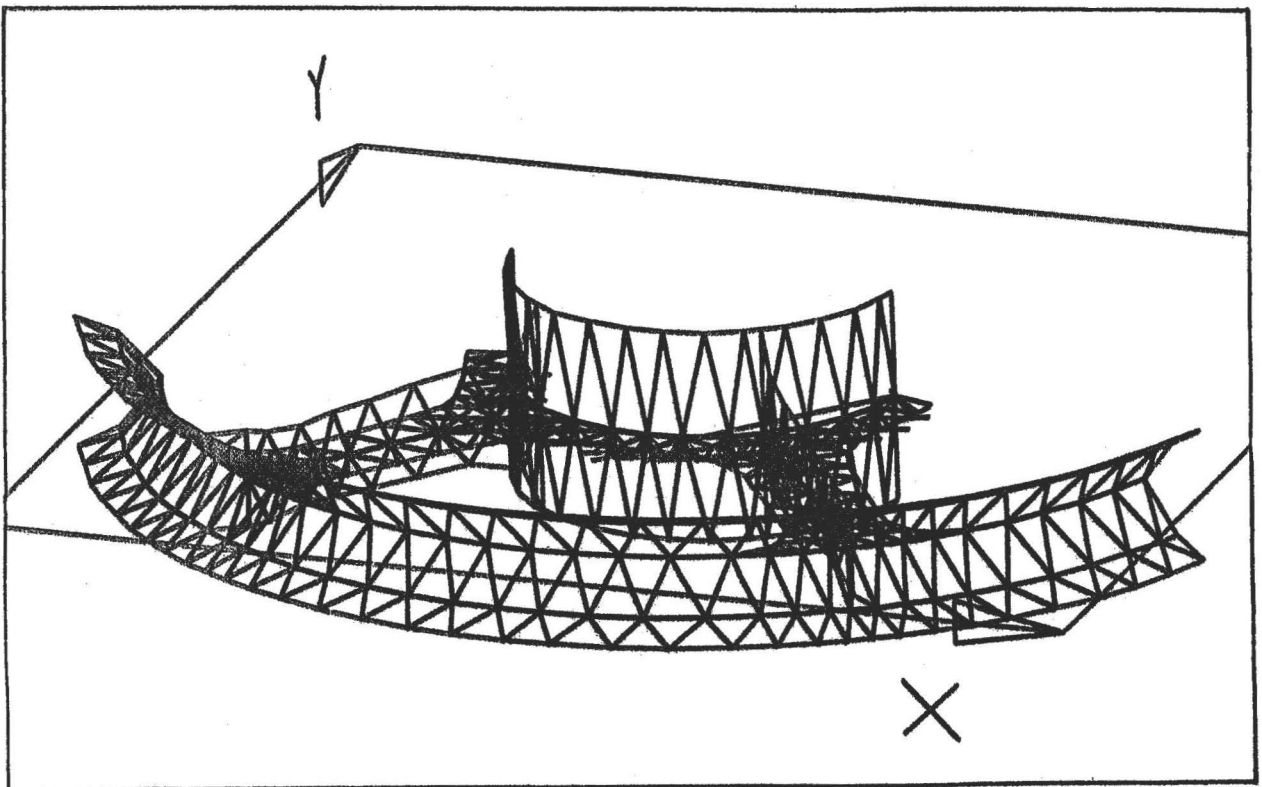
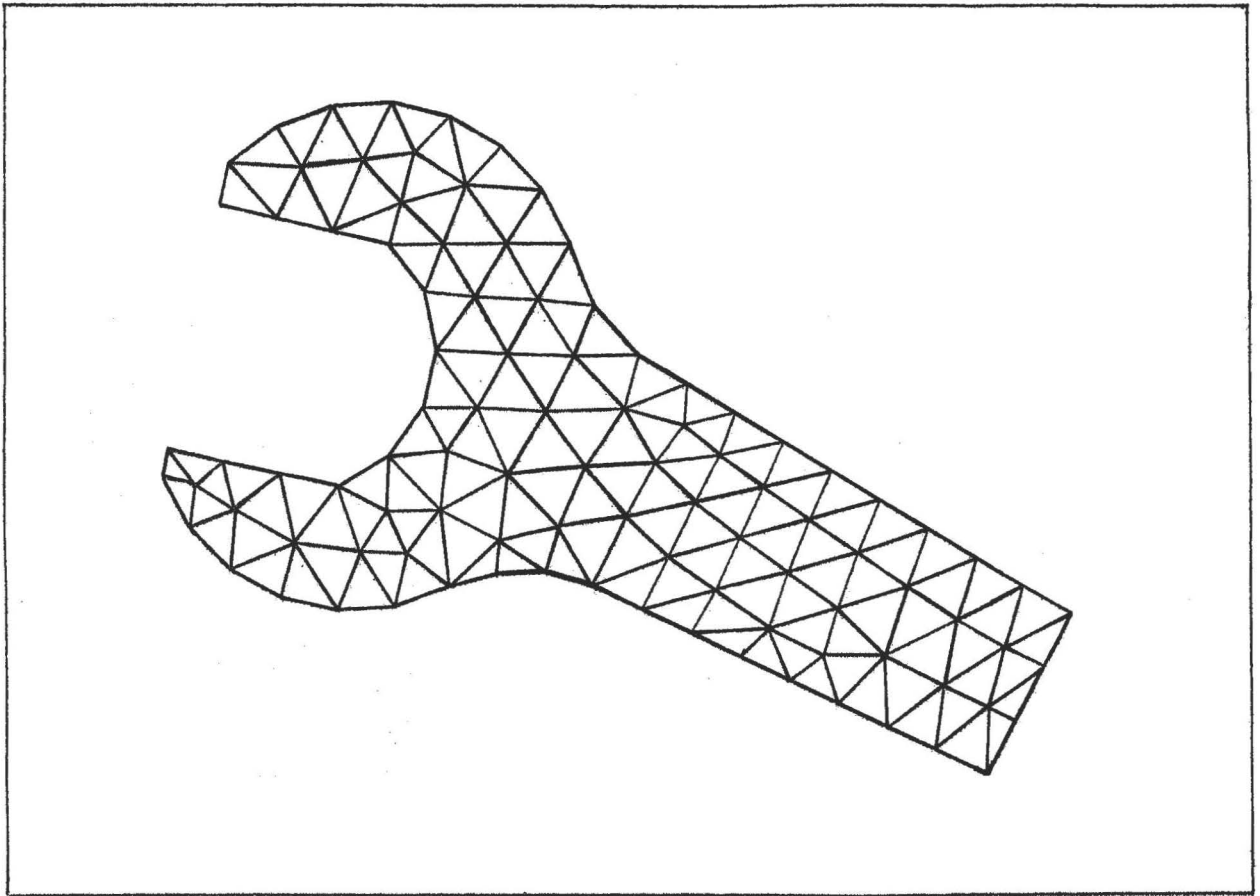


Bild 1: Beispiele zu GITRA3-Anwendungen



## 2. Einige Grundlagen zur FEM mit Verschiebungsansätzen

### 2.1. Verschiebungen als Hauptunbekannte

Bei Elastizitätsproblemen treten im allgemeinen Verschiebungen und Spannungen gemischt als unbekannte Größen auf. Für eine effektive Lösung ist es zweckmäßig, Hauptunbekannte festzulegen und diese zuerst zu berechnen und anschließend daraus die noch verbleibenden Unbekannten zu ermitteln. Als Hauptunbekannte werden in der Elastizitätstheorie entweder Verschiebungen oder Spannungen verwendet /5/. Je nach Wahl der Hauptunbekannten ergeben sich verschiedene Lösungswege sowohl für die differentielle als auch für die integrale Formulierung des Elastizitätsproblems, siehe Tabelle 1.

Tabelle 1: Lösungswege der Elastizitätstheorie

Typ der Ausgangsgleichungen	Hauptunbekannte		Typisches Näherungsverfahren
	Verschiebungen	Spannungen	
differentielle Formulierung	Lamé-Navier	Beltrami-Michell	Differenzenverfahren
integrale Formulierung (Variationsformulierung)	Prinzip der virtuellen Verrückungen ⇒ Minimum des elastischen Potentials	Prinzip der virtuellen Kräfte ⇒ Minimum des konjugierten elastischen Potentials	FEM

Wenn das Elastizitätsproblem differentiell formuliert wird, so entstehen aus dem statischen Gleichgewicht, den kinematischen Verträglichkeitsbeziehungen und den Materialgleichungen 15 partielle Differentialgleichungen mit 15 unbekanntem Funktionen: 6 Spannungen, 3 Verschiebungen und 6 Dehnungen.

Durch Eliminieren der Spannungen und Dehnungen erhält man die Gleichungen von Lamé-Navier, die nur noch Verschiebungen als Hauptunbekannte enthalten. Analog entstehen die Gleichungen von Beltrami-Michell für Spannungen als Hauptunbekannte, wenn Verschiebungen und Dehnungen eliminiert werden.

Die Lösung der Differentialgleichungen erfordert die Integration eines Randwertproblems. Ein typisches Näherungsverfahren dafür ist das Differenzenverfahren.

Wenn das Elastizitätsproblem als Energiebilanz für das Gesamtgebiet formuliert wird, so führen Verschiebungen als Hauptunbekannte auf das Prinzip der virtuellen Verrückungen und Spannungen auf das Prinzip der virtuellen Kräfte.

Beide Lösungswege gehören zur Variationsrechnung. Die Lösung einer derartigen Variationsaufgabe erfolgt für diskrete Werte über partielle Ableitungen.

Auf gemischte Ansätze, die zu hybriden Variationsformulierungen führen /6/, soll hier nicht eingegangen werden.

Die Methode der finiten Elemente ist ein Näherungsverfahren der Variationsrechnung und kann als Modifikation des Ritz-Verfahrens /7/ interpretiert werden.

Weltweit existieren FEM-Programme für Verschiebungen oder Spannungen oder für gemischte Unbekannte (finite Hybridelemente). Die überwiegende Zahl der Programme basiert jedoch auf Verschiebungen als Hauptunbekannte, weil der daraus folgende Lösungsweg die geringsten Schwierigkeiten bei der rechen-technischen Umsetzung bereitet.

Auch in GIRA3 sind ausschließlich finite Elemente für Verschiebungen implementiert. Deshalb wird nachfolgend nur für das Prinzip der virtuellen Verrückungen der Lösungsweg ausführlicher dargestellt.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen führt für lineare, wegunabhängige Probleme auf das Prinzip vom Minimum des elastischen Potentials. Das elastische Potential  $\Pi$  eines Gebietes  $\Omega$  mit dem Volumen  $V$  und der Oberfläche  $A$  lautet:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{\epsilon}}^T \underline{\underline{\sigma}} dV - \int_V \underline{\underline{v}}^T \underline{\underline{f}}_V dV - \int_A \underline{\underline{v}}^T \underline{\underline{f}}_A dA \quad (1)$$

mit

$\underline{\varepsilon}^T = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$	Vektor der unbekanntenen Dehnungen
$\underline{\sigma}^T = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$	Vektor der unbekanntenen Spannungen
$\underline{v}^T = (v_x, v_y, v_z)$	Vektor der unbekanntenen Verschiebungen
$\underline{f}_V^T = (f_{Vx}, f_{Vy}, f_{Vz})$	Vektor der Volumenkräfte
$\underline{f}_A^T = (f_{Ax}, f_{Ay}, f_{Az})$	Vektor der Oberflächenkräfte

Das Potential  $\Pi$  ist (wie jeder Energieausdruck) ein Skalar. Der erste Term in Gl. (1) repräsentiert die Formänderungsarbeit und die beiden anderen Terme bilden die Arbeit der äußeren Belastung.

Jede der angegebenen Vektorkomponenten ist eine Funktion des Raumes, z. B.  $\tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y, z)$ . Damit sind 15 unbekannte Funktionen in  $\underline{\varepsilon}$ ,  $\underline{\sigma}$  und  $\underline{v}$  enthalten.

Die Lösungsstrategie über Verschiebungen als Hauptunbekannte erfordert in Gl. (1) das Ersetzen der Dehnungen und Spannungen durch drei Verschiebungsfunktionen  $v_x(x, y, z)$ ,  $v_y(x, y, z)$  und  $v_z(x, y, z)$ , so daß  $\Pi(\underline{v})$  entsteht.

Im Falle des statischen Gleichgewichtes wird  $\Pi(\underline{v})$  minimal, d. h. die erste Variation von  $\Pi$  verschwindet:

$$\delta \Pi(\underline{v}) = 0 \quad (2)$$

Die unbekanntenen Verschiebungen  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  sind jedoch für unendlich viele Punkte des Gebietes  $\Omega$  gültig und bilden damit ein System mit unendlich vielen Freiheitsgraden. Die Berechnung der Verschiebungen für beliebig gestaltete Bauteile mit beliebiger Belastung ist daher analytisch nicht geschlossen lösbar.

Ein Ausweg besteht in der Formulierung einer Näherungslösung für ausgewählte Raumpunkte ("Knoten").

Damit reduziert sich die Aufgabe auf die Berechnung diskreter Verschiebungsgrößen an diesen Knoten, d. h. dann ist nur noch eine endliche Anzahl von Freiheitsgraden zu ermitteln und die Aufgabe wird auch für komplizierte Strukturen lösbar.

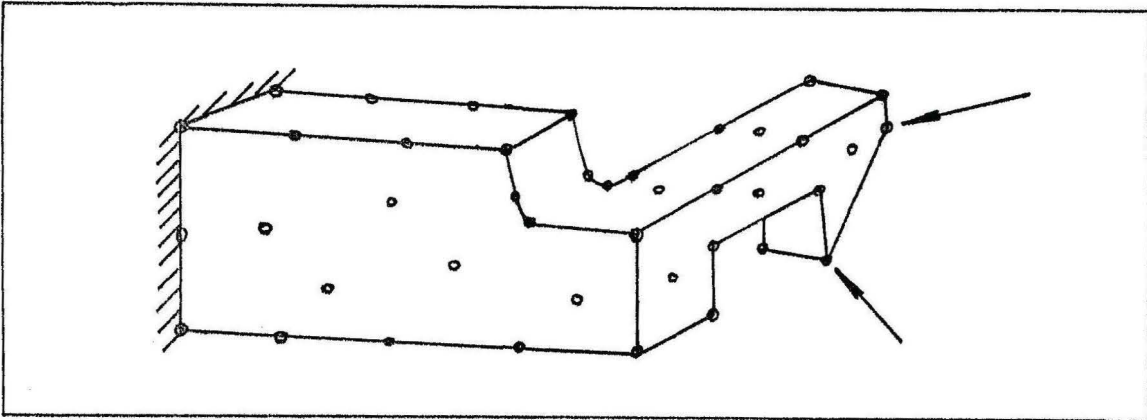


Bild 2: Festlegung von Knoten für eine räumliche Struktur

(Übrigens ist diese "Knotenstrategie" nicht nur für Variationsnäherungen brauchbar, sondern auch für differentielle Näherungen - siehe Differenzenverfahren).

Bei der Methode der finiten Elemente auf der Basis von Verschiebungs-Unbekannten wird das Gebiet  $\Omega$  in geometrisch einfache Elemente zerlegt, die nur an den Knotenpunkten miteinander verbunden sind. Je Element wird ein Verschiebungsansatz verwendet, der die kontinuierlichen Verschiebungen  $\underline{v}_e = (v_x(x,y,z), v_y(x,y,z), v_z(x,y,z))$  des Elementes durch diskrete unbekannte Knotenverschiebungsgrößen  $\underline{u}_e$  ersetzt.

Somit geht  $\Pi(\underline{v})$  in  $\Pi(\underline{u})$  über, und die Lösungsbedingung (2) für das statische Gleichgewicht wird zu einem System partieller Ableitungen modifiziert:

$$\frac{\partial \Pi(\underline{u})}{\partial \underline{u}} = \underline{0} \quad (3)$$

Erst mit Gl. (3) wird das algebraische Gleichungssystem einer Dimension  $n$  zur Berechnung von  $n$  unbekanntem Knotenverschiebungswerten  $\underline{u}$  bereitgestellt.

Im räumlichen Fall sind je Knotenpunkt  $i$  maximal 6 Freiheitsgrade in Form von 3 Verschiebungen und 3 Verdrehungen möglich:

$$\underline{u}_i^T = (v_{xi}, v_{yi}, v_{zi}, \rho_{xi}, \rho_{yi}, \rho_{zi})$$

siehe Bild 3.

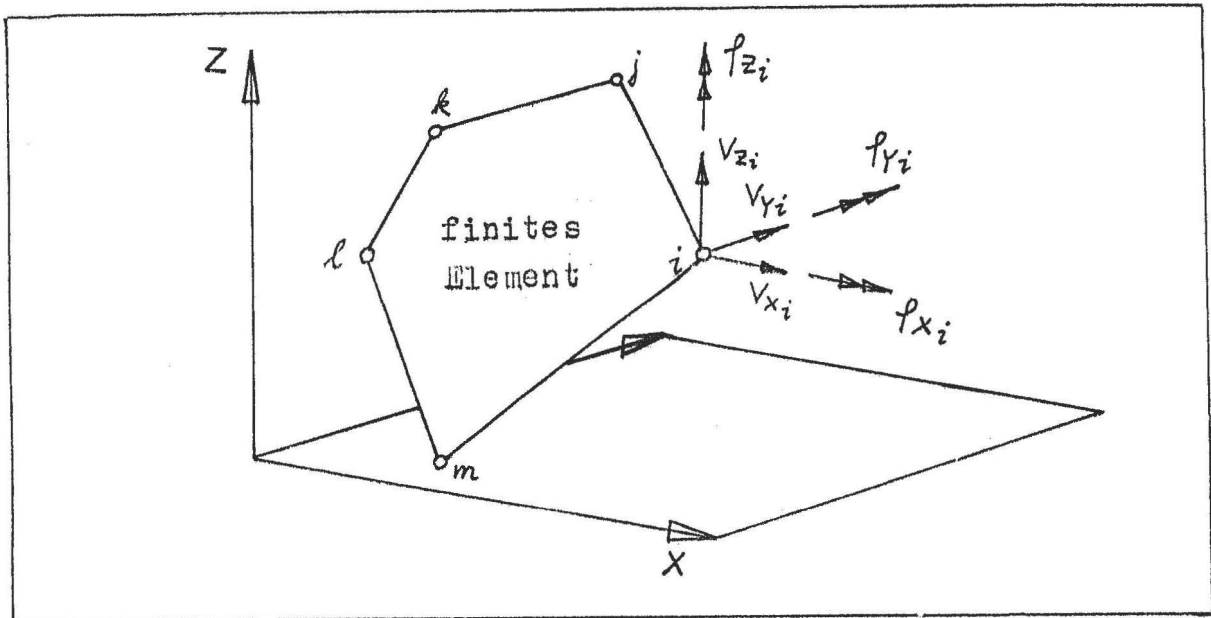


Bild 3: Diskrete Verschiebungsgrößen  $\underline{u}_i$  am Knoten i eines finiten Elementes

Je Element wird somit ein Elementknotenverschiebungsvektor  $\underline{u}_e$  gebildet:

$$\underline{u}_e^T = (\underline{u}_i, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_m)$$

mit  $m$  : Anzahl der Knoten des Elementes

## 2.2. Das Gleichungssystem für ein finites Element

Analog zur Gesamtstruktur entsteht je Element ein Elementpotential:

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \underline{\underline{\epsilon}}_e^T \underline{\underline{\sigma}}_e dV_e - \int_{V_e} \underline{v}_e^T \underline{f}_{Ve} dV_e - \int_{A_e} \underline{v}_e^T \underline{f}_{Ae} dA_e \quad (4)$$

Das statische Gleichgewicht ist natürlich auch je Element zu erfüllen. Das führt im Unterschied zu Gl. (3) auf die modifizierte Lösungsbedingung:

$$\frac{\partial \Pi_e(\underline{u}_e)}{\partial \underline{u}_e} = \underline{\underline{\sigma}} \quad (5)$$

Gl. (5) liefert je Element ein relativ kleines Gleichungssystem.

Zunächst sind die Dehnungen in (4) durch kontinuierliche Verschiebungen  $\underline{v}_e$  zu ersetzen:

$$\underline{\varepsilon}_e = \underline{D} \underline{v}_e - \underline{\varepsilon}_{oe} \quad (6)$$

mit  $\underline{D}$  Cauchyscher Matrix - Differentialoperator

$\underline{\varepsilon}_{oe}$  Vektor der Anfangsverzerrungen

(Der Einfluß von Dehnungen infolge Temperatur wird in dieser Herleitung nicht behandelt)

Weiterhin werden die Spannungen durch Verschiebungen ersetzt:

$$\underline{\sigma}_e = \underline{H} \underline{\varepsilon}_e = \underline{H} (\underline{D} \underline{v}_e - \underline{\varepsilon}_{oe}) \quad (7)$$

mit  $\underline{H}$  Hookesche Matrix

Damit ist  $\underline{\pi}_e$  nur noch von  $\underline{v}_e$  abhängig:

$$\underline{\pi}_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} (\underline{D} \underline{v}_e - \underline{\varepsilon}_{oe})^T \underline{H} (\underline{D} \underline{v}_e - \underline{\varepsilon}_{oe}) dV_e - \int_{V_e} \underline{v}_e^T \underline{f}_{ve} dV_e - \int_{A_e} \underline{v}_e^T \underline{f}_{Ae} dA_e \quad (8)$$

$\underline{\varepsilon}_{oe}$ ,  $\underline{f}_{ve}$  und  $\underline{f}_{Ae}$  werden hier als bekannte Größen vorausgesetzt.

Die Überführung der kontinuierlichen Verschiebungen in diskrete Knotenverschiebungsgrößen erfolgt mit Hilfe eines Verschiebungsansatzes:

$$\underline{v}_e = \underline{A} \underline{a}_e \quad (9)$$

mit  $\underline{A}$  Ansatzmatrix

$\underline{a}_e$  Vektor der Element-Freiwerte (enthält soviel Freiwerte  $\xi$ , wie das Element Freiheitsgrade hat)

$$\underline{a}_e^T = (a_1, a_2, a_3 \dots a_\xi)$$

Werden in  $\underline{A}$  die Knotenkoordinaten eingesetzt, so entsteht aus  $\underline{v}_e$  der Vektor  $\underline{u}_e$  der unbekanntenen diskreten Knotenverschiebungen, und  $\underline{A}$  geht in eine Knoten-Ansatzmatrix  $\underline{K}$  über:

$$\underline{u}_e = \underline{K} \underline{a}_e \quad (10)$$

Mit  $\underline{a}_e = \underline{K}^{-1} \cdot \underline{u}_e$  folgt damit aus (9):

$$\underline{u}_e = \underline{A} \underline{K}^{-1} \underline{u}_e \quad (11)$$

$$\underline{u}_e = \underline{G} \underline{u}_e \quad (12)$$

mit  $\underline{G}$ : Formfunktionsmatrix (Matrix der Ansatzfunktionen):

$\underline{G} = \underline{A} \underline{K}^{-1}$ . Gl. (12) repräsentiert den eigentlichen Verschiebungsansatz.

Die kontinuierlichen Verschiebungen im Element werden mit Gl. (12) auf diskrete Knotenverschiebungen des Elementes zurückgeführt. Daraus folgt analog zu (6) und (7):

$$\underline{\varepsilon}_e = \underline{D} \underline{G} \underline{u}_e - \underline{\varepsilon}_{oe} \quad (13)$$

und

$$\underline{\sigma}_e = \underline{H} (\underline{D} \underline{G} \underline{u}_e - \underline{\varepsilon}_{oe}) \quad (14)$$

Das Elementpotential lautet jetzt:

$$\begin{aligned} \Pi(\underline{u}_e) = & \frac{1}{2} \int_{V_e} (\underline{D} \underline{G} \underline{u}_e - \underline{\varepsilon}_{oe})^T \underline{H} (\underline{D} \underline{G} \underline{u}_e - \underline{\varepsilon}_{oe}) dV_e \\ & - \int_{V_e} \underline{G}^T \underline{u}_e^T \underline{f}_{ve} dV_e - \int_{A_e} \underline{G}^T \underline{u}_e^T \underline{f}_{Ae} dA_e \end{aligned} \quad (15)$$

bzw.

$$\Pi(\underline{u}_e) = \frac{1}{2} \underline{u}_e^T \cdot \overbrace{\int_{V_e} (\underline{D} \underline{G})^T \underline{H} (\underline{D} \underline{G}) dV_e}^{\underline{C}_e} \cdot \underline{u}_e - \underline{u}_e^T (\overbrace{\underline{f}_{oe} + \underline{f}_{pe} + \underline{f}_{ge}}^{\underline{f}_e}) \quad (16)$$

mit  $\underline{C}_e$  Elementsteifigkeitsmatrix

$\underline{f}_e$  Elementkraftvektor (  $\underline{f}_{oe}$  infolge Anfangsverzerrung  $\underline{\varepsilon}_{oe}$

$\underline{f}_{pe}$  infolge Volumenkräfte  $\underline{f}_{ve}$

$\underline{f}_{ge}$  infolge Oberflächenkräfte  $\underline{f}_{Ae}$  )

Damit entsteht

$$\Pi(\underline{u}_e) = \frac{1}{2} \underline{u}_e^T \underline{C}_e \underline{u}_e - \underline{u}_e^T \underline{f}_e \quad (17)$$

Die Lösungsbedingung (5) für das statische Gleichgewicht liefert das Element-Gleichungssystem zur Berechnung der unbekanntenen Verschiebungen  $\underline{u}_e$  :

$$\underline{C}_e \underline{u}_e = \underline{f}_e \quad (18)$$

Die quadratische Koeffizientenmatrix  $\underline{C}_e$  ist für Elastizitätsprobleme stets symmetrisch (Satz von Maxwell-Betti).

### 2.3. Einfache Beispiele

#### 2.3.1. Dreieckelement mit 3 Knoten (ebener Spannungszustand, 2 Verschiebungen je Knoten)

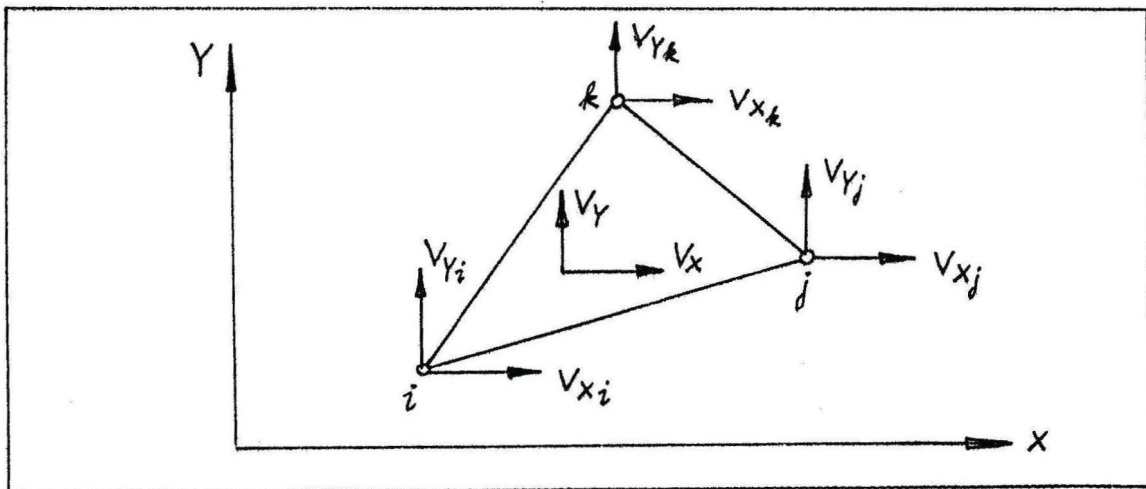


Bild 4: Dreieckelement in der Ebene

Für das Element sind 6 Freiheitsgrade vorgegeben, also müssen die kontinuierlichen Verschiebungen  $v_x(x,y)$  und  $v_y(x,y)$  im Innern des Elementes durch 6 Freiwerte abgebildet werden:

$$\begin{aligned} v_x(x,y) &= a_1 + a_2x + a_3y \\ v_y(x,y) &= a_4 + a_5x + a_6y \end{aligned} \quad (19)$$

bzw. in Matrix-Schreibweise:



$$\underbrace{\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}}_{\underline{v}_e} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{pmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underbrace{(a_1, a_2, \dots, a_6)^T}_{\underline{a}_e} \quad (20)$$

Weil  $v_x$  und  $v_y$  linear von  $x$  und  $y$  abhängen, bezeichnet man (19) bzw. (20) als linearen Verschiebungsansatz.

Der Verschiebungsansatz, angewendet auf jeden Knoten, liefert die diskreten Elementknotenverschiebungen  $\underline{u}_e$  :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ \hline v_{xj} \\ v_{yj} \\ \hline v_{xk} \\ v_{yk} \end{pmatrix}}_{\underline{u}_e} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ \hline 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ \hline 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{pmatrix}}_{\underline{K}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \hline a_3 \\ a_4 \\ \hline a_5 \\ a_6 \end{pmatrix}}_{\underline{a}_e} \quad (21)$$

Zur Berechnung von  $\underline{G}$  ist die Invertierung von  $\underline{K}$  erforderlich, siehe Gl. (11).  $\underline{G}$  ist dann ebenso wie  $\underline{A}$  eine  $(2 \times 6)$ -Matrix. Im ebenen Spannungszustand sind folgende Verschiebungs-Verzerrungsbeziehungen (Cauchy-Gleichungen) gültig:

$$\epsilon_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} - \epsilon_{ox} ; \epsilon_y = \frac{\partial v_y}{\partial y} - \epsilon_{oy} ; \gamma_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} - \gamma_{oxy} \quad (22)$$

bzw. in Matrix-Schreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}}_{\underline{\epsilon}_e} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}}_{\underline{D}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}}_{\underline{v}_e} - \underbrace{\begin{pmatrix} \epsilon_{ox} \\ \epsilon_{oy} \\ \gamma_{oxy} \end{pmatrix}}_{\underline{\epsilon}_{oe}} \quad (23)$$

(Die beim ebenen Spannungszustand noch auftretende Dehnung

$$\epsilon_z = \frac{\nu}{1-\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y) \text{ ist hier ohne Interesse.})$$

Die Hookesche Matrix für den ebenen Spannungszustand und isotropes elastisches Material lautet:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}}_{\underline{\sigma}_e} = \frac{E}{1-\nu^2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}}_H \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}}_{\underline{\epsilon}_e} \quad (24)$$

Die Elementsteifigkeitsmatrix besitzt folgende Form:

$$\underline{C}_e = h \cdot \int_{\Delta_e} (\underline{D}\underline{G})^T \underline{H} (\underline{D}\underline{G}) d\Delta_e \quad (25)$$

mit  $h$  : Dicke des Elementes und  $\Delta_e$  : Dreieckfläche

$\underline{C}_e$  ist eine (6x6)-Matrix. Bild 5 zeigt das Falksche Schema zu den notwendigen Matrizenmultiplikationen.

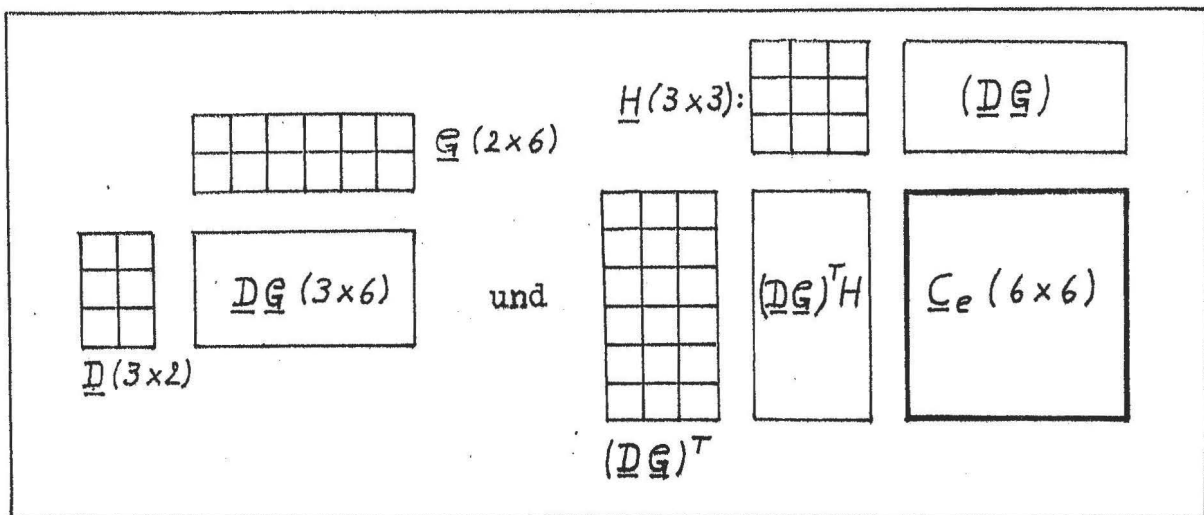


Bild 5: Schematische Darstellung der Matrizenprodukte in Gl. (25)

$\underline{C}_e$  enthält immer genau so viel Zeilen und Spalten, wie das Element Freiheitsgrade besitzt.

Das Element-Gleichungssystem ist in Bild 6 dargestellt.

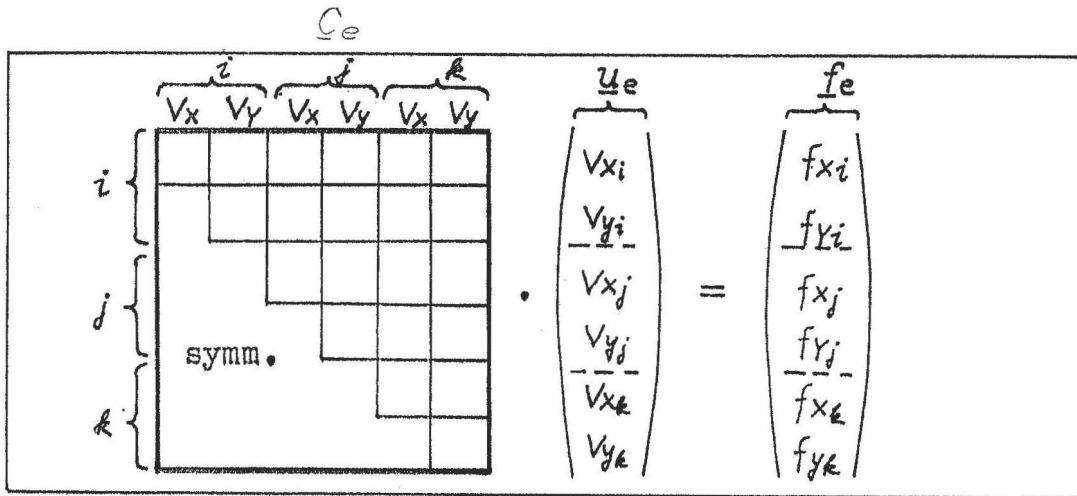


Bild 6: Das Element-Gleichungssystem

Je Knotenpunkt entstehen hier in  $C_e$  2 Zeilen und 2 Spalten, weil jeder Knoten 2 Freiheitsgrade besitzt.

### 2.3.2. Dreieckelement mit 6 Knoten (ebener Spannungszustand, 2 Freiheitsgrade je Knoten)

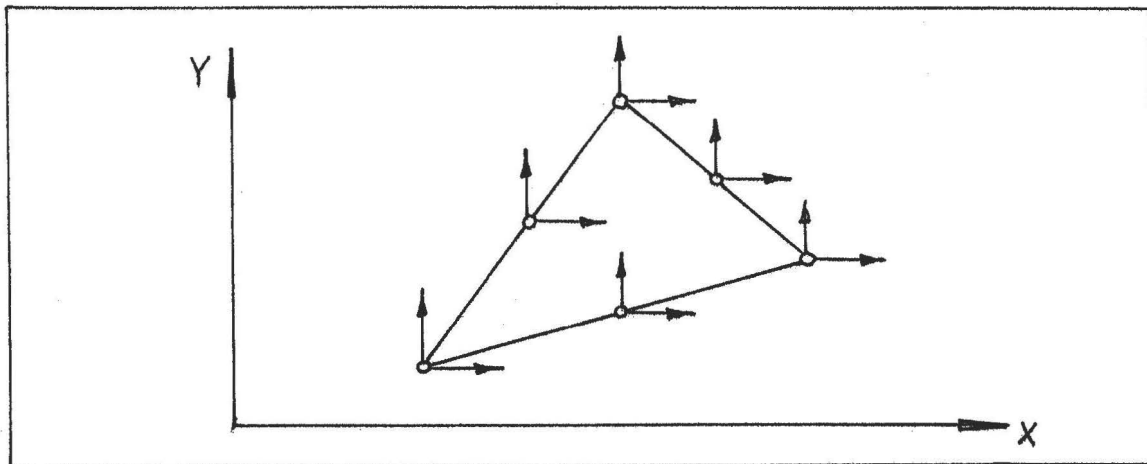


Bild 7: Dreieckelement mit Seitenmittenknoten

Die zwölf geforderten Freiheitsgrade führen auf einen quadratischen Verschiebungsansatz:

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & y & x^2 & y^2 & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & y^2 & xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} \quad (26)$$

Die Matrizen  $\underline{D}$  und  $\underline{H}$  bleiben gegenüber 2.3.1. unverändert. Damit entsteht eine  $(12 \times 12)$ -Matrix  $\underline{C}_e$ . Die mit diesem Element gegenüber 2.3.1. erzielbare höhere Genauigkeit erfordert einen erhöhten Berechnungsaufwand.

### 2.3.3. Balken in der Ebene (2 Knoten, 3 Freiheitsgrade je Knoten)

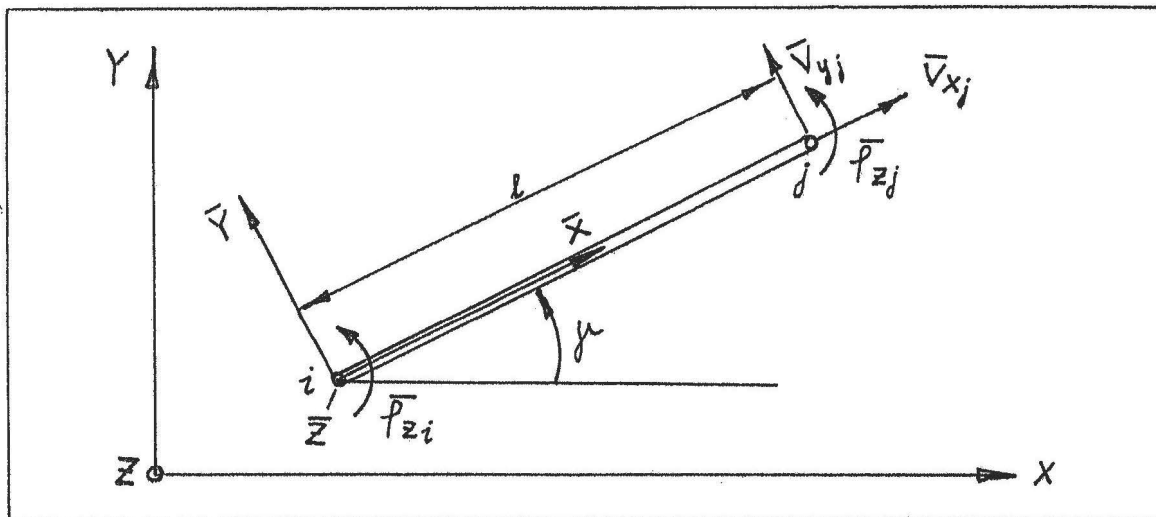


Bild 8: Balken mit Elementkoordinatensystem  $\bar{x}-\bar{y}-\bar{z}$

Im Vergleich zu den bisher aufgeführten Beispielen ergeben sich einige Unterschiede:

- Für den Balken genügen offensichtlich 2 Freiheitsgrade je Knoten nicht, um an den Knotenpunkten Biegung zu übertragen. Dafür ist zusätzlich je Knotenpunkt ein Moment erforderlich, bzw. die Bereitstellung eines Drehfreiheitsgrades  $\varphi_z$  um die z-Achse.
- Weiterhin ist hier die Einführung eines Elementkoordinatensystems (EKS) zweckmäßig. Ein EKS ist immer dann von Vorteil, wenn die Matrix  $\underline{C}_e$  in diesem System einfacher zu formulieren ist als im globalen Strukturkoordinatensystem (SKS). In den vorherigen Beispielen wurde auf das EKS verzichtet. Siehe auch Abschnitt 2.4.4.
- Ein Verschiebungsansatz ist für den statisch belasteten Balken nicht unbedingt erforderlich, weil hier die Matrix  $\underline{C}_e$  direkt (und exakt) aus Formänderungsbetrachtungen, der

Biege-Differentialgleichung oder aus dem Satz von Castigliano hergeleitet werden kann.

Entsprechend den 6 Freiheitsgraden des Elementes entsteht eine (6x6)-Matrix  $\underline{C}_e$  :

$$\underline{C}_e = \begin{array}{c|ccc|ccc} & v_{xi} & v_{yi} & f_{zi} & v_{xj} & v_{yj} & f_{zj} \\ \hline & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} \\ & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} \\ \hline & \underline{C}_{ij}^T & & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & & & & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ & & & & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} \end{array} \quad (27)$$

alles im EKS

mit  $A$  : Querschnittsfläche

$E$  : Elastizitätsmodul,  $I_z$  : Flächenträgheitsmoment um  $\bar{z}$ ,

$l$  : Länge des Balkens,  $F_x, F_y$  Kräfte im EKS,  $M_z$  Moment im EKS

Gl. (27) beinhaltet keinen Querkraftschub. Es handelt sich damit um einen "Bernoulli-Balken".

Zur Herleitung von (27) ist auch ein Verschiebungsansatz möglich:

$$\underline{v}_e(x) = \begin{pmatrix} v_x(x) \\ v_y(x) \end{pmatrix} = \underline{G}(x) \cdot \underline{u}_e \quad (28)$$

Die Matrix  $\underline{G}$  und die kontinuierliche Verschiebung  $\underline{v}_e$  sind hier nur noch von der Koordinate  $x$  in Richtung der Balkenlängsachse abhängig. Für  $\underline{G}$  gilt:

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{l} & 0 & 0 & \frac{x}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 & x\left[1 - \frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^2\right] & 0 & 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 & x\left[-\frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^2\right] \end{pmatrix} \quad (29)$$

Die erste Zeile in  $\underline{G}$  beschreibt die Längenänderung  $v_x$  in Abhängigkeit von den diskreten Knotenverschiebungen in

x-Richtung:

$$v_x(x) = v_{xi} + \frac{x}{l} (v_{xj} - v_{xi}) \quad (30)$$

Die zweite Zeile für die Durchbiegung  $v_y(x)$  folgt aus der statischen Biegelinie, wenn als Randbedingungen die Verschiebungen  $v_{yi}$ ,  $v_{yj}$  sowie die Verdrehungen  $\varphi_{zi}$ ,  $\varphi_{zj}$  an den Knoten  $i$  und  $j$  zur Bestimmung der Integrationskonstanten verwendet werden.

Die in  $G$  enthaltenen Terme sind Ansatzfunktionen, die als Hermite-Polynome interpretiert werden können /8/; /9/.

Einsetzen von (29) in den Term  $\underline{C}_e$  von (16) bzw. in die modifizierte Form speziell für den Balken

$$\underline{C}_e = A \cdot \int_0^l (\underline{D}\underline{G})^T \underline{H} (\underline{D}\underline{G}) dx \quad (31)$$

liefert genau die in (27) gezeigte exakte Matrix  $\underline{C}_e$ .

Im Unterschied zur Statik kann beim schwingenden Balken die erforderliche Elementmassenmatrix nur näherungsweise formuliert werden, siehe Abschnitt 3.1.

## 2.4. Das große Gleichungssystem für die Struktur

### 2.4.1. Formale Herleitung

Das Gesamtpotential  $\Pi$  entsteht als Summe aus allen Elementpotentialen:

$$\Pi = \sum_{e=1}^{ne} \Pi_e = \sum_{e=1}^{ne} \left( \frac{1}{2} \underline{u}_e^T \underline{C}_e \underline{u}_e - \underline{u}_e^T \underline{f}_e \right) \quad (32)$$

mit  $ne$  : Anzahl der Elemente

Dabei erfolgt die Überlagerung der Potentiale nur an den Knotenpunkten.

Durch die Überlagerung entsteht:

$$\Pi = \frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{C} \underline{u} - \underline{u}^T \underline{f} \quad (33)$$

- mit  $\underline{u}$  Struktur-Knotenverschiebungsvektor (für sämtliche Knotenfreiheitsgrade) in Richtungen des Strukturkoordinatensystems
- $\underline{C}$  Struktursteifigkeitsmatrix
- $\underline{f}$  Strukturkraftvektor

Die Lösungsbedingung (3) für statisches Gleichgewicht führt mit (33) auf das große Gleichungssystem

$$\underline{C} \underline{u} = \underline{f} \quad (34)$$

$\underline{C}$  ist jetzt eine symmetrische Bandmatrix.

#### 2.4.2. Praktische Realisierung des Strukturgleichungssystems

Die Einordnung der Elementsteifigkeitsmatrizen  $\underline{C}_e$  in die große Matrix  $\underline{C}$  erfolgt zweckmäßig in Form von "Knotenblock-Untermatrizen".

Jede Elementsteifigkeitsmatrix läßt sich in derartige knotenbezogene Matrizen  $\underline{C}_{ij}$  aufteilen, indem die Freiheitsgrade jedes Knoten als Block behandelt werden.

In Bild 9 sind einige Beispiele dargestellt.

Die Symmetrie der Matrix  $\underline{C}_e$  ist dadurch charakterisiert, daß in der linken unteren Matrixhälfte transponierte Untermatrizen stehen. Allein die Freiheitsgradanzahl des jeweiligen Knotens bestimmt die Dimension der Untermatrizen  $\underline{C}_{ij}$ . Mit den im Bild 9 angeführten Untermatrizen handelt es sich demnach um die finiten Elemente der Abschnitte 2.3.3. und 2.3.1.

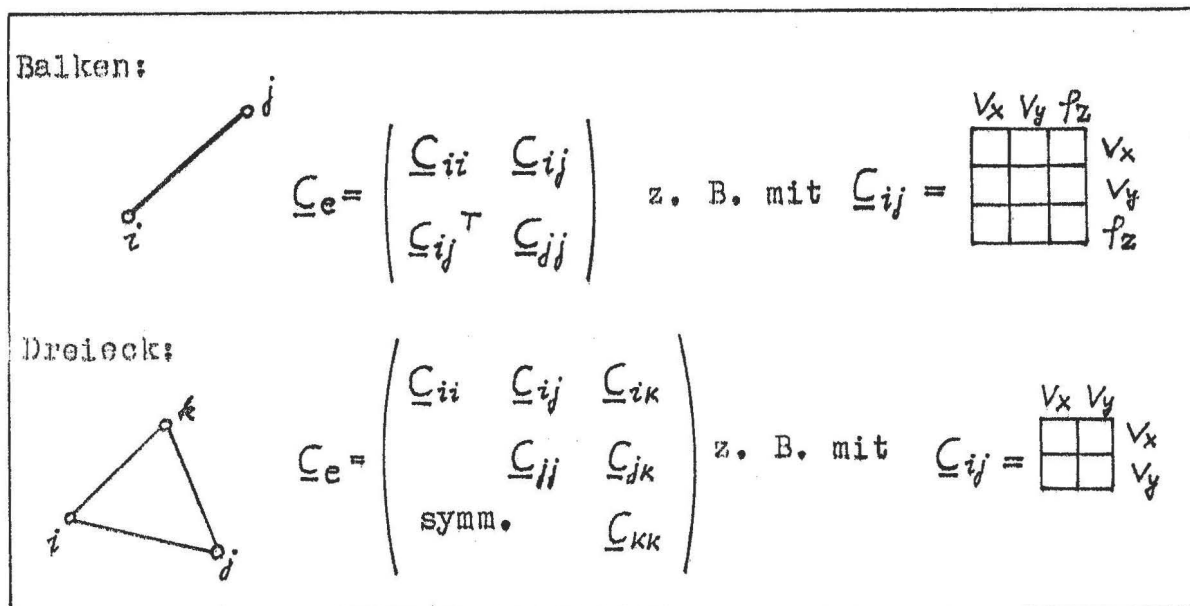


Bild 9: Beispiele für die Aufteilung der Matrix  $\underline{C}_e$  in Untermatrizen  $\underline{C}_{ij}$

Die gezeigte Aufteilung in Matrizen  $\underline{C}_{ij}$  bleibt auch erhalten, wenn es sich um Balken und Dreiecke im dreidimensionalen Raum handelt. Derartige finite Elemente mit 6 Freiheitsgraden je Knoten werden in GITRA3 verwendet. Dafür hat jede Untermatrix die in Bild 10 dargestellte (6x6)-Form infolge der 6 Freiheitsgrade  $v_x, v_y, v_z, f_x, f_y, f_z$  je Knoten.

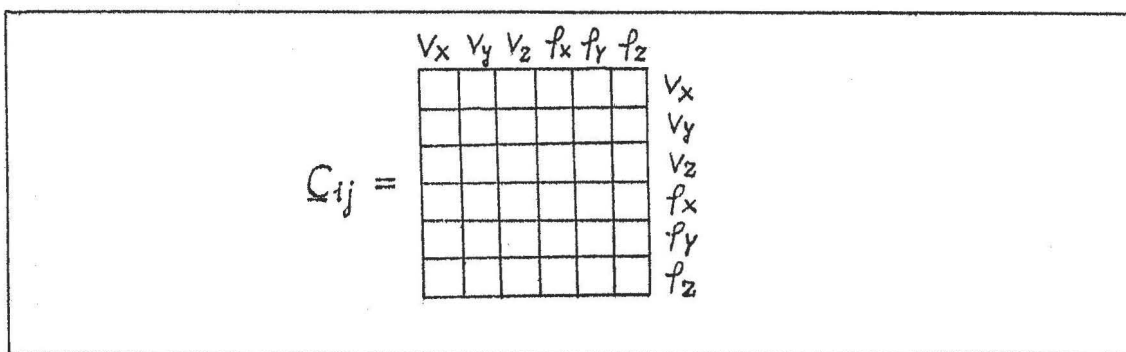


Bild 10: Knotenblock-Untermatrix der finiten Elemente in GITRA3

Daraus folgt sofort, daß der Balken im Raum eine (12x12)-Matrix  $\underline{C}_e$  besitzt und das ebene 3-Knoten-Dreieck im Raum eine (18x18)-Matrix.



Die jeweils symmetrischen Untermatrizen  $\underline{C}_{ij}$  liefern den Zusammenhang zwischen den Kraftgrößen  $\underline{f}_i$  am Knoten  $i$  und den durch sie am Knoten  $j$  hervorgerufenen Verschiebungsgrößen  $\underline{u}_j$ . Im FEM-Programm werden die Knotenblock-Untermatrizen jeder Matrix  $\underline{C}_e$  entsprechend ihrer  $i$ - $j$ -Indizierung in die Struktursteifigkeitsmatrix  $\underline{C}$  eingeordnet. Dabei werden die Einzelwerte der Untermatrizen auf schon vorhandene Werte bereits einsortierter Untermatrizen addiert. Eine derartige Überlagerung kann natürlich nur stattfinden, wenn verschiedene Elemente gleiche Knoten besitzen, d. h. wenn es sich um Koppelknoten handelt. Bild 11 zeigt ein Beispiel für den Aufbau einer Struktursteifigkeitsmatrix  $\underline{C}$ .

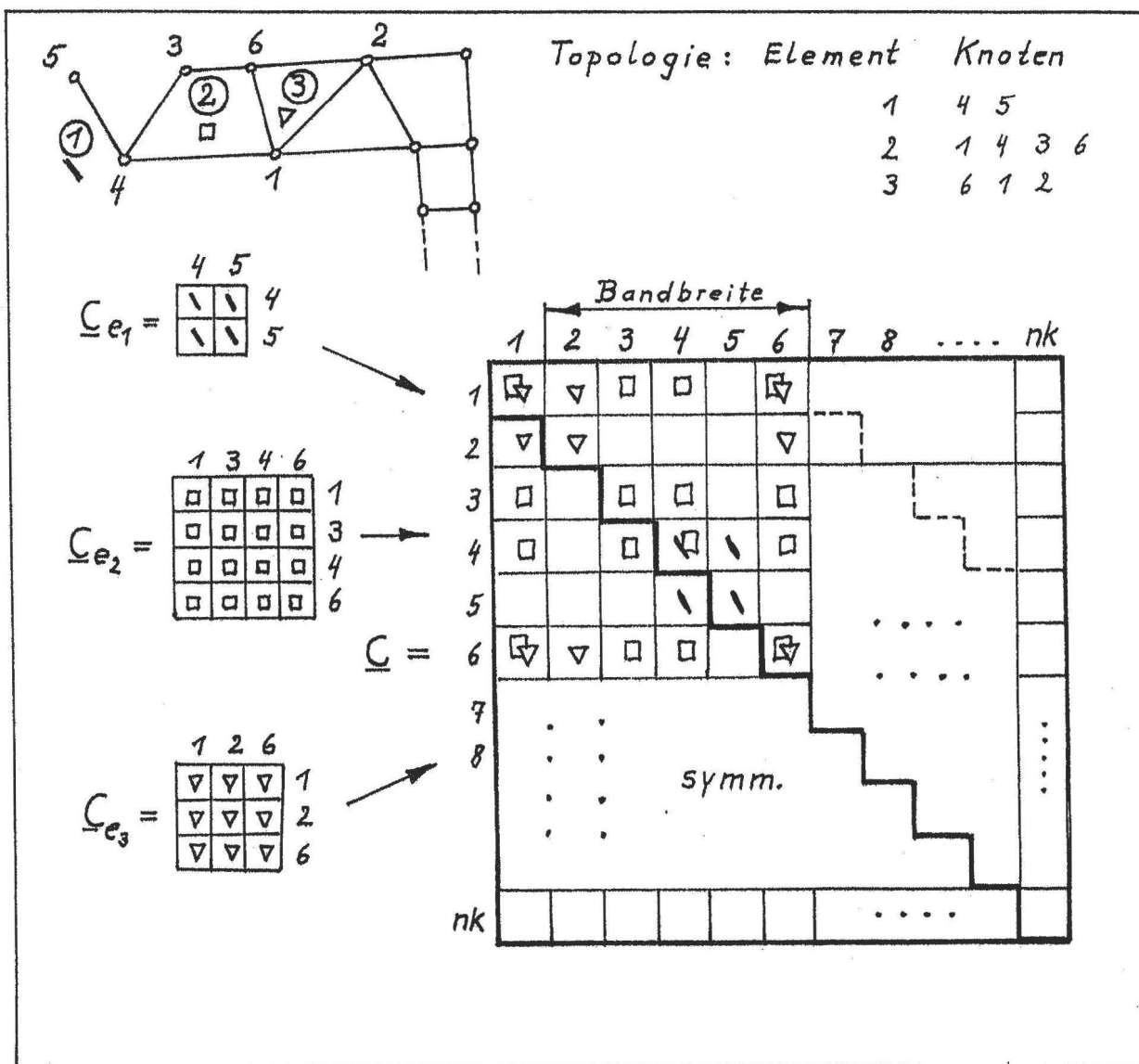


Bild 11: Belegung der Matrix  $\underline{C}$  für die ersten 3 Elemente einer Struktur mit  $nk$  Knoten

Die "Regieanweisung" für das Programm zum Einsortieren der Element-Untermatrizen  $\underline{C}_{ij}$  in die große Matrix  $\underline{C}$  ist also die vom Programm-Nutzer vorgegebene Topologie (Zuordnung der Knoten zu den Elementen).

### 2.4.3. Bandbreite, Bandweite und Profil der Struktursteifigkeitsmatrix

Im Unterschied zur vollbesetzten Matrix  $\underline{C}$  des Ritz-Verfahrens /7/ entsteht bei finiten Elementen immer eine Bandmatrix mit einer

Bandbreite     $bb$

(maximale Knotenpunktdifferenz in der gesamten Struktur). Diese Bandmatrix ist infolge der  $\underline{C}_e$ -Symmetrie bei Elastizitätsproblemen stets symmetrisch. Die beiden Eigenschaften Symmetrie und Bandstruktur sind sehr gut zur Senkung der Speicheranforderung und Rechenzeit von FEM-Programmen nutzbar. Die Bandbreite ist die maximal vorkommende Anzahl von Knotenblock-Untermatrizen auf einer Knotenblock-Zeile der Matrix  $\underline{C}$  (ohne Hauptdiagonalblock).

Die gesamte Matrix  $\underline{C}$  besteht eigentlich aus  $nk^2$  Untermatrizen ( $nk$ : Anzahl der Knoten). Für die Lösung des großen Gleichungssystems (34) müssen jedoch nur die im Band liegenden Untermatrizen berücksichtigt werden, deren Anzahl  $nk \cdot (bb + 1)$  ist. (Die im Bild 11 eingezeichnete Bandbreite gilt nur für die ersten 3 Elemente,  $bb$  kann für nachfolgende Elemente noch größer werden).

Im Unterschied zur Bandbreite wird als

Bandweite     $bw$

die maximal vorkommende Anzahl von Matrix-Einzelwerten in einer einzelnen Zeile der Matrix  $\underline{C}$  bezeichnet:

$$bw = n_1 \cdot (bb + 1) \quad (35)$$

mit  $n_1$ : Anzahl der Freiheitsgrade eines Knotens.

Die Matrix  $\underline{C}$  besteht eigentlich aus  $n^2$  Einzelwerten (mit  $n$ : Anzahl der Freiheitsgrade der gesamten Struktur). Infolge Symmetrie und Bandstruktur sind aber maximal nur  $n \cdot bw$  Werte

zur Lösung des Gleichungssystems zu verarbeiten.

Zur Lösung des großen Gleichungssystems (34) sind näherungsweise

$$k \approx \frac{1}{2} n \cdot bw^2 \quad (36)$$

arithmetische Operationen erforderlich, d. h. die Bandweite beeinflusst quadratisch die Rechenzeit, während die Anzahl der Knoten (bzw. der Freiheitsgrade) nur linear eingeht und die der Elemente sogar ohne Einfluß ist.

Die Bandbreite bzw. die Bandweite ist nur von der Knoten-Numerierung der Struktur abhängig, d. h. die Rechenzeit wird maßgeblich von der vorgegebenen Numerierung beeinflusst. Bild 12 zeigt ein Beispiel für eine Struktur, die lediglich in ihrer Knoten-Numerierung variiert wurde.

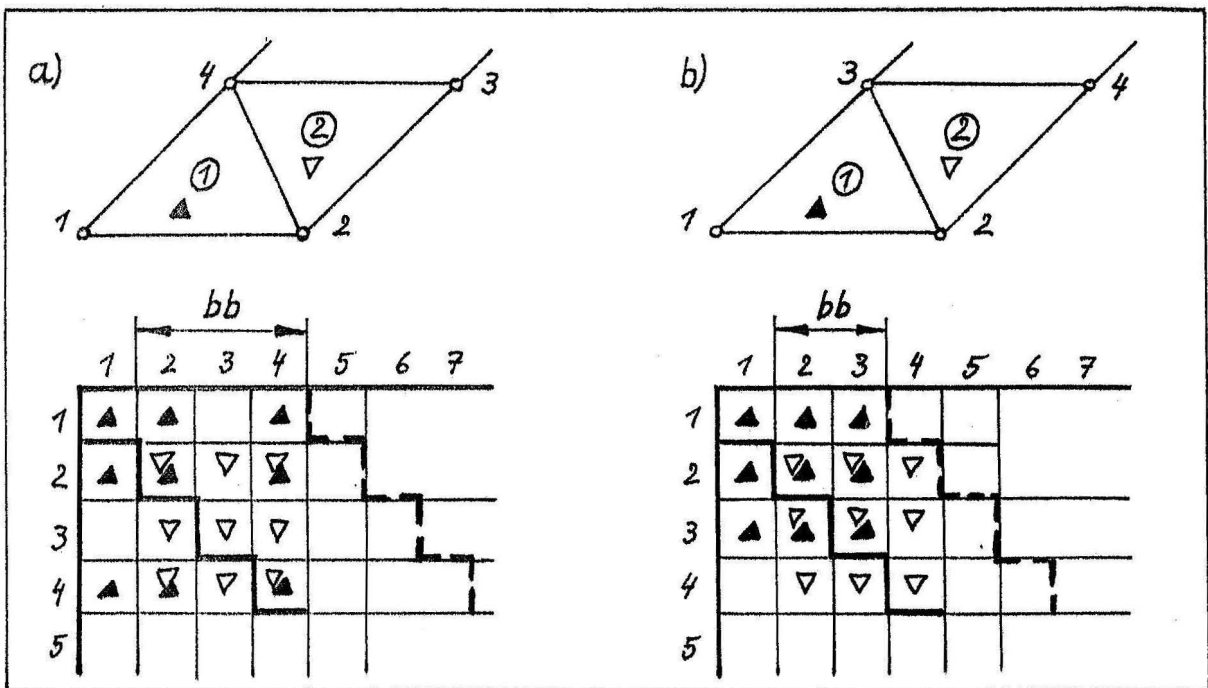


Bild 12: Veränderung der Matrix C infolge veränderter Knoten-Numerierung

Für dieses Beispiel gilt: a)  $bb = 3$  ,  $bw = 8$  ,  $bw^2 = 64$

b)  $bb = 2$  ,  $bw = 6$  ,  $bw^2 = 36$

Die Berechnung beider Strukturen führt auf identische Verformungsergebnisse, aber für die Struktur a) wird beim Lösen des Gleichungssystems fast die doppelte Rechenzeit gegenüber b) benötigt.

Das Phänomen der Rechenzeitbeeinflussung durch die Knoten-Numerierung hat bereits vor Jahren eine breite theoretische Entwicklung ausgelöst, für die zwei Hauptrichtungen erkennbar sind. Die eine Richtung basiert auf Gaußschen Eliminationsverfahren zur Lösung des Gleichungssystems, dessen Bandbreite zuvor durch ein Zusatzprogramm automatisch optimiert wird. Die andere Richtung wird durch das von Irons begründete Frontlöungsverfahren /10/ (frontal solution method) repräsentiert, bei dem die Optimierung der Bandbreite entfällt. Dieses Verfahren bereitet jedoch bei der Lösung von Gleichungssystemen mit mehreren rechten Seiten (d. h. mehrere Lastfälle, sukzessive Lasterhöhung oder simultane Eigenwertberechnung) größere Schwierigkeiten. In vielen FEM-Programmen wird deshalb das Gaußsche Verfahren in Verbindung mit leistungsfähigen Algorithmen zur Bandbreitenoptimierung bevorzugt. Besonders effektiv ist das nur für symmetrische Matrizen geeignete Cholesky-Verfahren /11/, /12/, das eine Variante des Gaußschen Verfahrens darstellt.

Als Optimierungsalgorithmen für die Bandbreite haben sich graphentheoretisch begründete Verfahren durchgesetzt, insbesondere der Algorithmus nach Cuthill/McKee /13/ und dessen Modifikationen /14/, /15/, /16/.

Bei näherer Betrachtung der Bandmatrix  $C$  fällt auf, daß innerhalb des Bandes zahlreiche Untermatrizen nicht belegt sind. Die Belegung der Matrix kann verschieden interpretiert werden, z. B. in Form "horizontaler Klüfte", Bild 13.

Infolge dieser Interpretation entsteht das

#### Zeilenprofil der Bandmatrix.

Dieses Profil ist die Summe aller mit Werten belegten Untermatrizen, wobei je Knotenzeile auch nicht belegte Untermatrizen mitgezählt werden, die links von der am weitesten rechts stehenden Untermatrix angeordnet sind. Nicht mitgezählt werden hier die Hauptdiagonal-Untermatrizen.

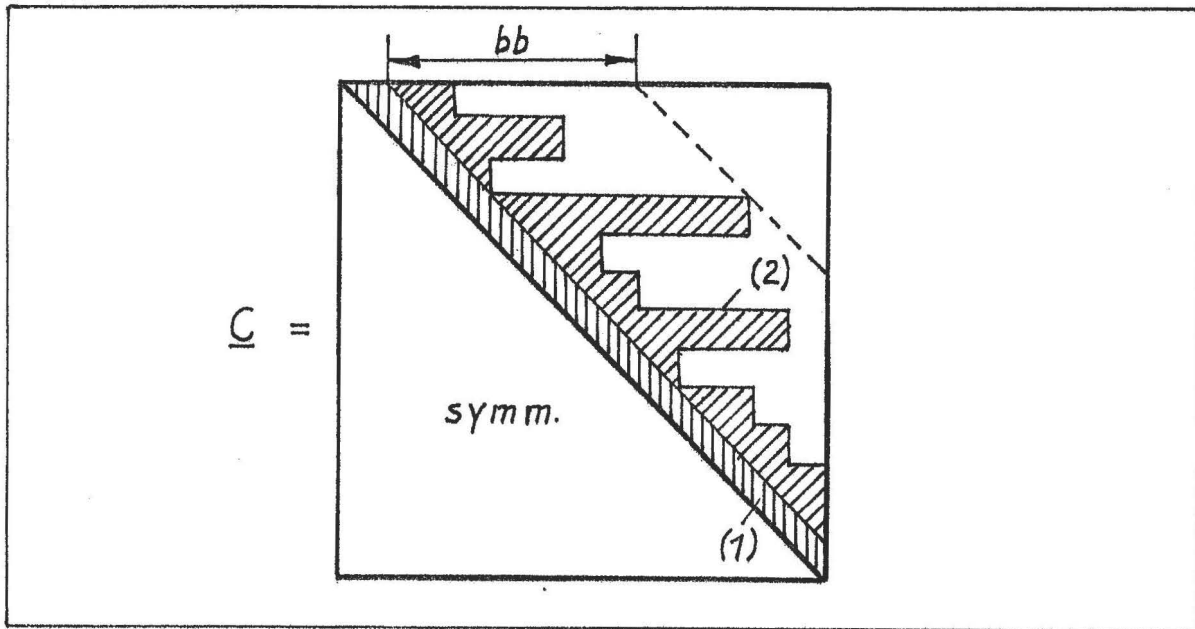


Bild 13: Matrix  $C$  mit Hauptdiagonalblöcken (1) und Zeilenprofil (2)

Auch hier existieren bereits Algorithmen zur Lösung des Gleichungssystems, die nur das Profil der Matrix zur Berechnung verwenden und somit zum Teil erheblich Rechenzeit einsparen. Weiterhin kann auch das Profil automatisch optimiert werden, zumeist in Verbindung mit der Bandbreite.

Für eine geringe Rechenzeit sind deshalb profilberücksichtigende Algorithmen zur Lösung des Gleichungssystems unter Vorschaltung eines Programms zur automatischen Bandbreiten- und Profilminimierung am effektivsten. Derartige Algorithmen werden in GITRA3 genutzt, indem ein modifiziertes Cholesky-Verfahren /17/ und eine Bandbreiten- und Profilminimierung nach Gibbs, Poole und Stockmeyer /16/ verwendet wird. Im Unterschied zum herkömmlichen Cholesky-Verfahren erfolgt in GITRA3 eine "Rückwärts"-Dreieckzerlegung, dann Rückwärtseinsetzen und abschließend Vorwärtseinsetzen. Damit bleiben die horizontalen Klüfte des Profils während der Dreieckzerlegung erhalten.

Bei diesem Algorithmus ist nicht die Bandbreite bzw. Bandweite für die Rechenzeit entscheidend, sondern die Größe des Profils.

#### 2.4.4. Koordinatentransformation vom EKS ins SKS

Wird die Elementsteifigkeitsmatrix  $\underline{C}_e$  in einem Elementkoordinatensystem (EKS) beschrieben, das nicht parallel zum Strukturkoordinatensystem (SKS) liegt, so ist vor der Einordnung der Knotenblock-Untermatrizen  $\underline{C}_{ij}$  in die Matrix  $\underline{C}$  eine Koordinatentransformation erforderlich.

Die beim großen Gleichungssystem zu berechnenden Verschiebungsgrößen  $\underline{u}$  beziehen sich generell auf das SKS. Die Verschiebungsansätze in einem gedrehten EKS liefern aber Verschiebungsgrößen  $\tilde{\underline{u}}_e$ , die Komponenten  $\underline{u}_e$  bezüglich des SKS bilden. Der Zusammenhang zwischen diesen Größen wird durch eine "Element-Koordinatentransformationsmatrix"  $\underline{T}_e$  geliefert:

$$\tilde{\underline{u}}_e = \underline{T}_e \cdot \underline{u}_e \quad (37)$$

Auch für die Kräfte entstehen Komponenten:

$$\tilde{\underline{f}}_e = \underline{T}_e \cdot \underline{f}_e \quad (38)$$

Das im Abschnitt 2.2. hergeleitete Gleichungssystem (18) für ein finites Element kann nun präziser für das EKS formuliert werden:

$$\tilde{\underline{C}}_e \tilde{\underline{u}}_e = \tilde{\underline{f}}_e \quad (39)$$

Um Verschiebungskomponenten  $\underline{u}_e$  im SKS zu erhalten, sind die Beziehungen (37) und (38) in (39) einzusetzen. Die quadratische Matrix  $\underline{T}_e$  ist hier eine Orthogonalmatrix, d. h. es gilt

$$\underline{T}_e^{-1} = \underline{T}_e^T \quad (40)$$

Unter Berücksichtigung dieser Eigenschaft wird aus (39):

$$(\underline{T}_e^T \tilde{\underline{C}}_e \underline{T}_e) \underline{u}_e = \underline{f}_e \quad (41)$$

Vor dem Einsortieren der Untermatrizen  $\underline{C}_{ij}$  in die Matrix  $\underline{C}$  ist also bei nichtparallelen EKS und SKS die Transformation

$$\underline{C}_e = \underline{I}_e^T \tilde{\underline{C}}_e \underline{I}_e \quad (42)$$

auszuführen. Auch diese Transformation wird bezüglich der Knotenblock-Untermatrizen praktisch realisiert, d. h.

$$\underline{C}_{ij} = \underline{I}_k^T \tilde{\underline{C}}_{ij} \underline{I}_k \quad (43)$$

mit  $\tilde{\underline{C}}_{ij}$  Untermatrix im EKS,  $\underline{I}_k$  Knoten-Koordinatentransformationsmatrix.

Die Matrix  $\underline{I}_k$  ist grundsätzlich von gleicher Dimension wie

$\underline{C}_{ij}$ .

$\underline{I}_k$  besteht aus einer oder mehreren gleichen (3x3)-Matrizen  $\underline{T}$ , die jeweils 9 Richtungscosinus-Werte R1 bis R9 enthalten:

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} R1 & R4 & R7 \\ R2 & R5 & R8 \\ R3 & R6 & R9 \end{pmatrix} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } R1 &= \cos(x\bar{x}) & R2 &= \cos(x\bar{y}) & R3 &= \cos(x\bar{z}) \\ R4 &= \cos(y\bar{x}) & R5 &= \cos(y\bar{y}) & R6 &= \cos(y\bar{z}) \\ R7 &= \cos(z\bar{x}) & R8 &= \cos(z\bar{y}) & R9 &= \cos(z\bar{z}) \end{aligned} \quad (45)$$

Die Werte R1 bis R9 hängen nur von der Lage des finiten Elementes im SKS ab. In (45) bedeutet z. B.  $\cos(x\bar{y})$ : Komponente der Elementachse  $\bar{y}$  bezüglich der Strukturachse  $x$ .

Die Matrizen  $\underline{T}$  sind in  $\underline{I}_k$  und  $\underline{I}_e$  stets als Hauptdiagonal-Untermatrizen angeordnet.

### Beispiele

#### a) Balken in der Ebene (Abschnitt 2.3.3., Bild 8)

Der Balken ist um den Winkel  $\gamma$  gegenüber dem SKS gedreht.  $z$  und  $\bar{z}$  liegen parallel und zeigen in die gleiche Richtung, also

$$R9 = \cos(z\bar{z}) = +1$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} R1 &= \cos(x\bar{x}) = \cos \gamma & R4 &= \cos(y\bar{x}) = \sin \gamma \\ R2 &= \cos(x\bar{y}) = -\sin \gamma & R5 &= \cos(y\bar{y}) = \cos \gamma \end{aligned}$$

Die anderen Richtungscosinus-Werte sind Null, weil  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  keine Komponenten auf  $z$  und  $\bar{z}$  keine Anteile auf  $y$  und  $x$  liefern. Damit entsteht für den ebenen Balken:

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (46)$$

Für diesen Balken gilt:

$$\underline{T}_k = \underline{T} \quad (47)$$

und

$$\underline{T}_e = \begin{pmatrix} \underline{T}_k & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{T}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{T} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{T} \end{pmatrix} \quad (48)$$

b) Dreieck im Raum mit 3 Knoten und 6 Freiheitsgraden je Knoten (GITRA3-Element, siehe Bild 14)

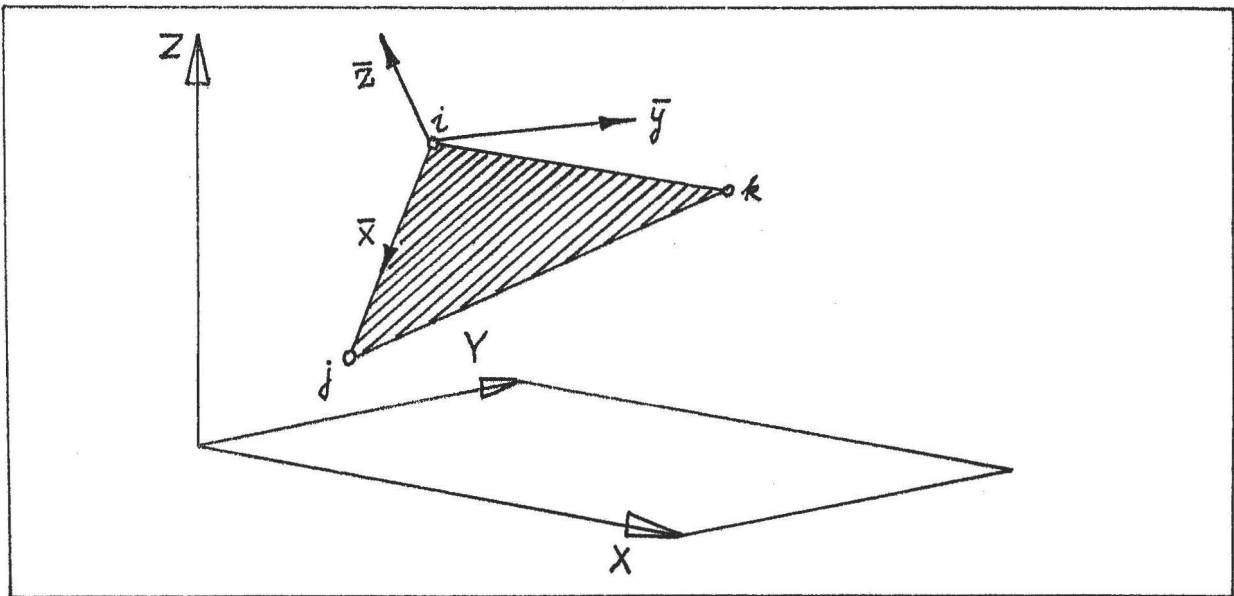


Bild 14: Dreieck mit beliebiger Lage im SKS

Für eine beliebige Lage im Raum ist  $\underline{T}$  voll besetzt. Weil je Knoten eine  $(6 \times 6)$ -Matrix  $\underline{C}_{i,j}$  entsteht, gehört dazu eine  $\underline{T}_k$ -Matrix gleicher Dimension:

$$\underline{T}_k = \begin{pmatrix} \underline{T} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{T} \end{pmatrix} \quad (49)$$

Zur  $(18 \times 18)$ -Matrix  $\underline{C}_e$  entsteht dann die ebenso große Matrix  $\underline{T}_e$ :



$$\underline{I}_e = \begin{pmatrix} \underline{I}_k & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{I}_k & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{I}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{I} & & & & & & & & \text{Null} \\ & \underline{I} & & & & & & & \\ & & \underline{I} & & & & & & \\ & & & \underline{I} & & & & & \\ \text{Null} & & & & \underline{I} & & & & \\ & & & & & \underline{I} & & & \\ & & & & & & \underline{I} & & \\ & & & & & & & \underline{I} & \\ & & & & & & & & \underline{I} \end{pmatrix} \quad (50)$$

Die 9 Richtungscosinus-Werte werden in GITRA3 automatisch aus den Raumkoordinaten der Dreieck-Knoten i, j und k berechnet.

Beim Viereck werden die Koordinaten der drei zuerst angegebenen Knoten verwendet.

Für Balken und Federn genügen jedoch die zwei Knotenpunkte nicht, um die Matrix  $\underline{T}$  vollständig zu bestimmen. Deshalb ist hier zusätzlich vom Programm-Nutzer der Winkel ALPHA anzugeben, der die Drehung des EKS um die Elementachse  $\bar{x}$  kennzeichnet, siehe Anwendungsbeschreibung (Anlage).

#### 2.4.5. Berücksichtigung fester und teilverschieblicher Lager

Die bisher beschriebene Struktursteifigkeitsmatrix  $\underline{C}$  ist eine singuläre Matrix.

Damit ist das Gleichungssystem (34) zunächst nicht lösbar. Das Gleichungssystem kann erst aufgelöst werden, wenn jegliche Starrkörperbewegung der Struktur bei Belastung verhindert wird.

Die Festlegung der Geometrie und Materialeigenschaften in den Elementsteifigkeitsmatrizen  $\underline{C}_e$  führt faktisch zu einer "im schwerelosen Raum hängenden" Struktur. Wird diese Struktur belastet, so kann sie nur ohne Verformung ausweichen, d. h. sie kann nur mit Starrkörperbewegung reagieren. Die mathematische Konsequenz zu diesem physikalischen Verhalten ist die Singularität der Matrix  $\underline{C}$ . Die vom Nutzer vorgegebenen Randbedingungen müssen mindestens die Starrkörperverschiebungen und -verdrehungen verhindern. Das geschieht durch Vorgabe von Festlagern und/oder teilverschieblichen Lagern an den Knoten der finiten Elemente. Bei Festlagern sind alle 6 Freiheitsgrade

verhindert, bei teilverschieblichen Lagern nur einzelne ausgewählte Freiheitsgrade. Zur Berücksichtigung der Lager sind zwei Wege üblich:

- a) Während des Programmablaufes werden im großen Gleichungssystem die entsprechenden Zeilen und Spalten eliminiert. Es entsteht ein reduziertes Gleichungssystem, deren Zeilen und Spalten zum Teil neu numeriert sind.
- b) Auf das Hauptdiagonalelement des entsprechenden Freiheitsgrades wird ein willkürlicher großer Steifigkeitswert gesetzt und im Kraftvektor wird eine Null angegeben. Dann entsteht bei der Lösung des Gleichungssystems für diesen Freiheitsgrad näherungsweise eine Verformung gleich Null.

In GITRA3 werden die Festlager nach Weg a) und die teilverschieblichen Lager nach Weg b) verarbeitet.

#### 2.4.6. Umrechnung beliebiger Belastung auf Knotenbelastungen im SKS

Auch die Belastung der finiten Elemente kann nur an den Knoten erfolgen. Für Einzelkräfte und -momente sind demzufolge Knoten an Lastangriffspunkten festzulegen. Vor der Berechnung muß die Belastung in Richtungen des Strukturkoordinatensystems vorliegen. Deshalb sind vom SKS abweichende Kräfte und Momente vor der Eingabe in Komponenten bezüglich des SKS zu zerlegen.

Weiterhin müssen Flächen- und Linienlasten in äquivalente Knoteneinzelkräfte und -momente umgerechnet werden. Diese Einzelwerte sind so zu berechnen, daß die Verformung an den Knoten exakt der Verformung entspricht, die sich aus der Flächen- oder Linienlast ergeben würde.

Die Umrechnung der Flächen- und Linienlasten erfolgt bezüglich der belasteten Kanten der finiten Elemente. Im Falle finiter Elemente mit 6 Freiheitsgraden je Knoten ergeben sich dann für jede Kante zwei feste Einspannungen, für die praktisch "Auflager" zu berechnen sind. Für räumliche Probleme ist dabei eine getrennte Betrachtung in den drei möglichen Ebenen vorteilhaft. Bild 15 zeigt für eine Ebene die notwendigen Beziehungen. Für die 6 unbekanntenen Auflagergrößen dieser Ebene stehen nur 3 Gleichgewichtsbeziehungen zur Verfügung. Das

Problem ist also 3fach statisch unbestimmt und kann nur durch zusätzliche Formänderungsbetrachtungen, z. B. mit Hilfe des Satzes von Castigliano, gelöst werden.

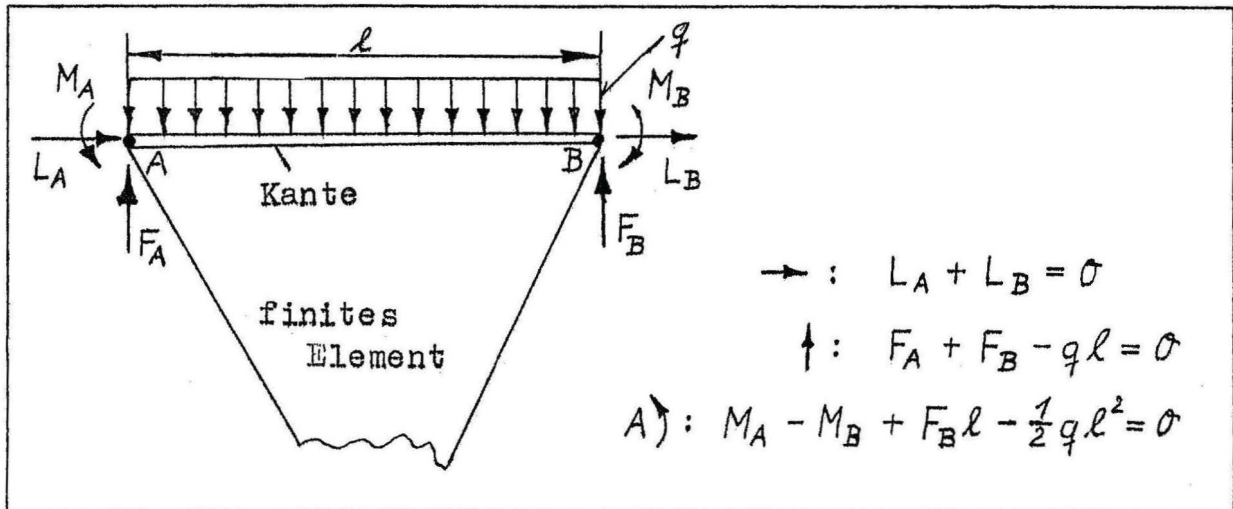


Bild 15: Ersetzen einer Linienlast  $q$  durch Knotenkräfte und -momente

Das Ergebnis für konstante Streckenlast  $q$  über eine Kante der Länge  $l$  lautet:

$$\begin{aligned}
 M_A &= M_B = \frac{1}{12} q l^2 \\
 F_A &= F_B = \frac{1}{2} q l \\
 L_A &= L_B = 0
 \end{aligned}
 \tag{51}$$

In Bild 16 sind einige Beispiele zu äquivalenten Knotenbelastungen dargestellt.

Nur im Falle gleich langer Kanten heben sich die Knoteneinzelmomente benachbarter Kanten gegenseitig auf.

Auch Flächenlasten sind mittels Gleichgewichts- und Formänderungsbetrachtungen auf äquivalente Knoteneinzelbelastungen zu überführen.

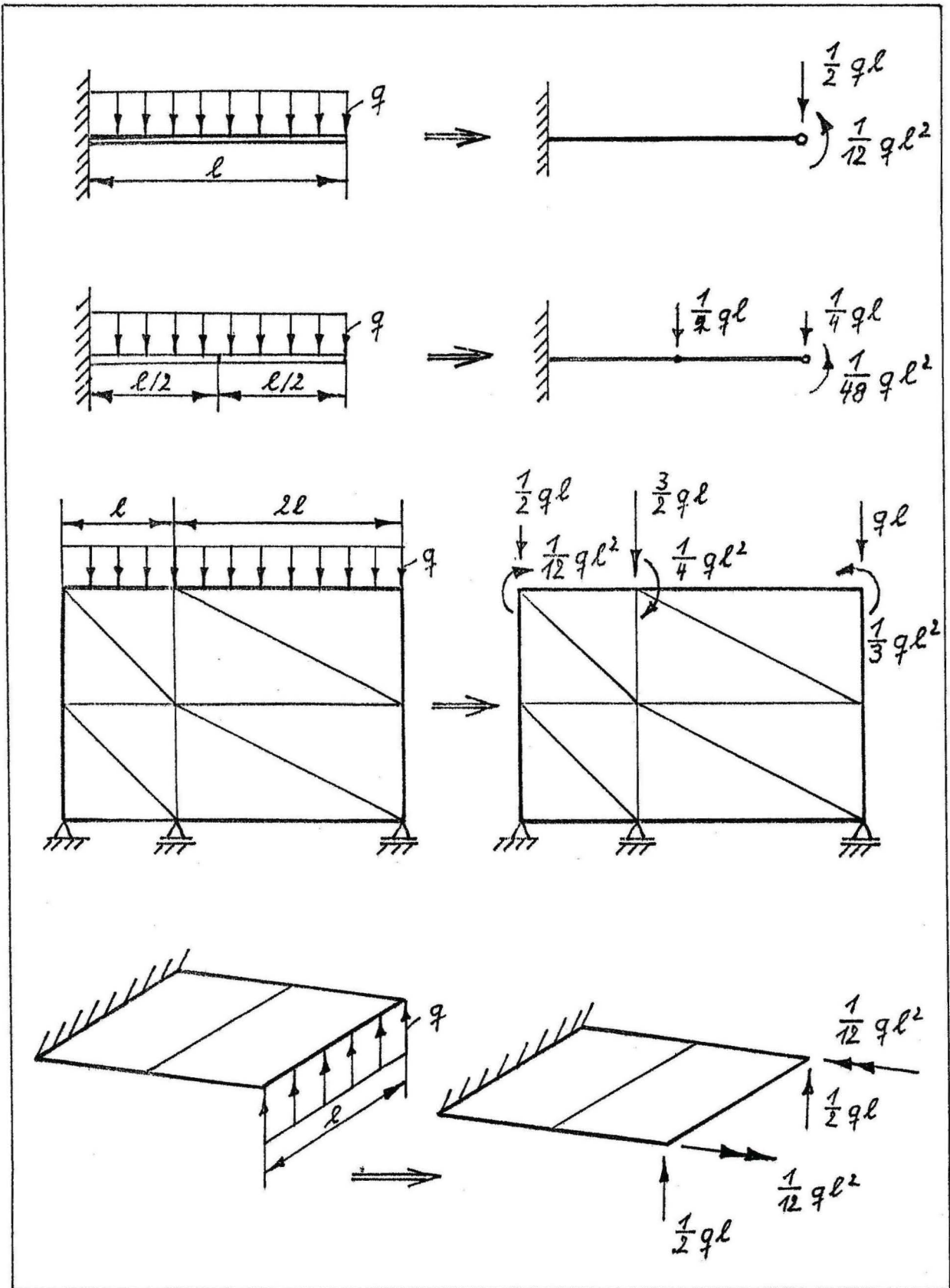


Bild 16: Beispiele zu äquivalenten Knotenbelastungen für Strukturen mit Balken, Dreiecken und Vierecken unter konstanter Streckenlast  $q$

## 2.5. Arbeitsweise eines FEM-Programmes für Verschiebungen

Vom Nutzer muß zuerst das Berechnungsmodell entsprechend Elementkatalog aufbereitet werden.

Dann ergeben sich für statische Verschiebungen folgende Programmschritte:

### 1. Dateneingabe im Dialog:

Knotenkoordinaten im SKS, Topologie, Lagerungsbedingungen, Belastung an Knoten im SKS

Mit der Topologie wird die Bandbreite und das Profil der Matrix  $\underline{C}$  fixiert. Im Interesse minimaler Rechenzeit sollte der Aufbau der Matrix  $\underline{C}$  automatisch mittels

### 2. Bandbreiten- und Profilminimierung

optimiert werden.

Das Ergebnis ist eine neue Topologie, die nur intern im Rechner verwendet wird. Danach folgt:

### 3. Aufbau aller Elementsteifigkeitsmatrizen $\underline{C}_e$ im EKS und Transformation der Matrizen $\underline{C}_e$ ins SKS

### 4. Aufbau der Struktursteifigkeitsmatrix $\underline{C}$

in Form von Knotenblock-Untermatrizen  $\underline{C}_{ij}$  der einzelnen finiten Elemente

### 5. Lösung des statischen Gleichungssystems (30)

Eventuell für mehrere statische Lastfälle (dann wird die relativ aufwendige Dreieckzerlegung nur einmal durchgeführt und für jeden weiteren Lastfall wieder verwendet).

Im Ergebnis der statischen Berechnung liegen für jeden Knoten diskrete Verformungen (Verschiebungen und Verdrehungen) vor. Die Berechnung von Schnittreaktionen und Spannungen kann erst danach erfolgen (postprocessing).

Zur Berechnung dynamischer Verformungen ist stets eine Eigenwertberechnung erforderlich, die einen mehrfach höheren Aufwand gegenüber einer statischen Berechnung bedeutet, siehe Abschnitt 2.8.

Für die Eigenwertberechnung sind folgende zusätzliche Programmschritte erforderlich:

Zu 3.: Aufbau aller Elementmassenmatrizen  
im EKS und deren Transformation ins SKS

Zu 4.: Aufbau einer Strukturmassenmatrix M  
analog zur Matrix C

Zu 5.: Lösung des Eigenwertproblems,  
siehe Abschnitt 2.8.2.

Auch hier wird die Cholesky-Dreieckzerlegung einmal benötigt. Dann wird das Eigenwertproblem iterativ gelöst. Jeder Iterationsschritt kann unter Umständen solange wie die Berechnung eines statischen Lastfalles dauern - das ist vor allem von der Anzahl der gewünschten Eigenfrequenzen abhängig - .

Ergebnisse der dynamischen Berechnung sind die Eigenfrequenzen und die zugehörigen Eigenschwingformen (d. h. normierte diskrete Verschiebungen und Verdrehungen je Knoten).

Nach Berechnung der Eigenwerte und -vektoren können erzwungene gedämpfte Schwingungen rationell analysiert werden.

## 2.6. Spannungsverteilungen in Flächenelementen

Die Spannungen werden bei Verschiebungs-FEM-Programmen nachträglich berechnet und gehören damit zum "postprocessing". Während beim statisch belasteten Balken auch für die Spannungsberechnung theoretisch die exakten Werte ermittelbar sind, gibt es bei Flächenelementen gegenüber den genäherten Verschiebungsergebnissen eine zusätzliche Fehlerquote der Spannungen. Die Ursache ist die direkte oder indirekte Verwendung der Cauchy'schen Gleichungen: Die Dehnungen und damit die Spannungen können nur mit Hilfe partieller Ableitungen aus den diskreten Knotenverformungen berechnet werden. Daraus folgen Spannungssprünge an den Knoten, die sogar als Fehlerindikator verwendbar sind, siehe Abschnitt 2.7.

Die Spannungen sind den Dehnungen proportional, solange das Hookesche Gesetz gilt. Durch Einsetzen der Gl. (9) in (6) entsteht für die Dehnungen

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_e = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{a}}_e - \underline{\underline{\varepsilon}}_{oe} \quad (52)$$

oder

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_e = \underline{\underline{V}} \underline{\underline{a}}_e - \underline{\underline{\varepsilon}}_{oe} \quad (53)$$

mit  $\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{N}}$  : "Verzerrungsmatrix"

Mit der Matrix  $\underline{\underline{V}}$  kann die Dehnungsverteilung und damit qualitativ auch die Spannungsverteilung je Element übersichtlich dargestellt werden.

### Beispiele

a) Dreieck mit 3 Knoten (Abschnitt 2.3.1.)

$$\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{N}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{pmatrix} \quad (54)$$

(54) liefert:

$$\underline{\underline{V}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (55)$$

Das Dehnungsfeld im Innern des Dreieckes ist hier unabhängig von den Koordinaten  $x$  und  $y$ , d. h. es wird mit dem linearen Verschiebungsansatz eine konstante Dehnung bzw. eine konstante Spannung je Element erzeugt, siehe Bild 17.

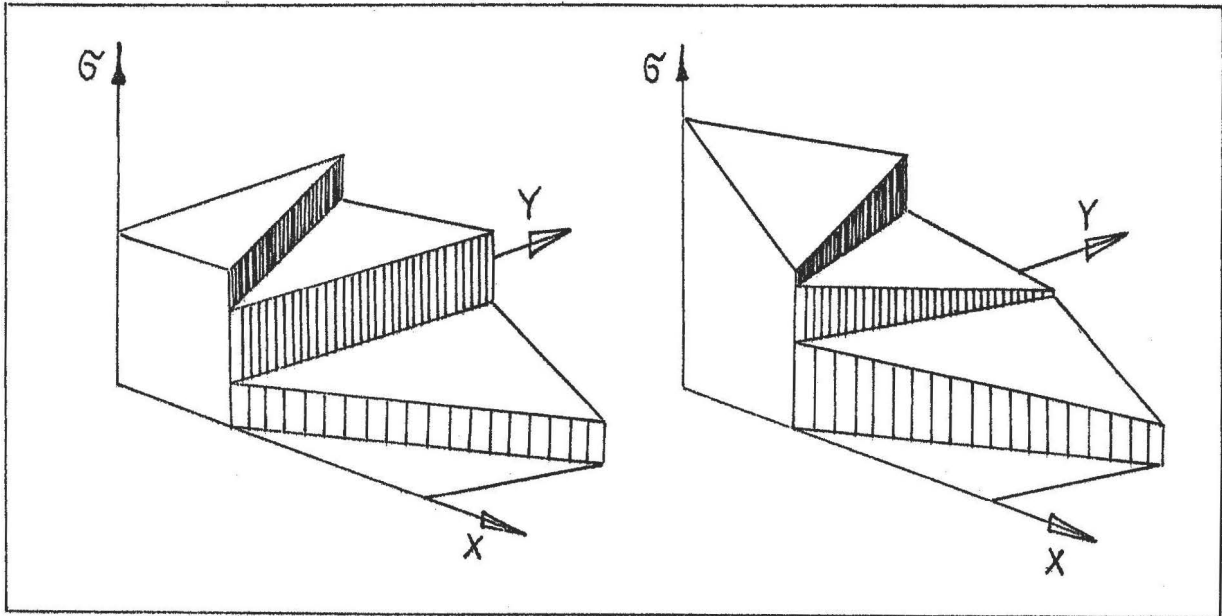


Bild 17: Spannungsverteilung für Dreiecke mit  
a) linearem und b) quadratischem Verschiebungsansatz  
in der x-y-Ebene

b) Dreieck mit 6 Knoten (Abschnitt 2.3.2.)

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2x & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2y & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2y & x & 0 & 1 & 0 & 2x & 0 & y \end{pmatrix} \quad (56)$$

$\underline{\varepsilon}_e$  und damit  $\underline{\sigma}_e$  hängen jetzt linear von  $x$  und  $y$  ab. Trotzdem entstehen an den Knoten Sprünge  $\Delta \underline{\varepsilon}$  bzw.  $\Delta \underline{\sigma}$ , Bild 17. Auch höherrangige Ansätze können die Sprünge nur mildern.

## 2.7. Genauigkeit der berechneten Lösungen

Die Methode der finiten Elemente liefert (wie jedes Näherungsverfahren) Ergebnisse, die fehlerbehaftet sind. Diese Verfahrensfehler sind mitunter wesentlich geringer als die Modellierungsfehler, die vom Nutzer zwangsläufig gemacht werden. Derartige Fehler entstehen bei der Idealisierung des realen Bauteiles und seiner Belastung in einem Berechnungsmodell, das wiederum nur aus den zur Verfügung stehenden finiten Elementtypen aufgebaut werden kann. Mangelnde Kenntnisse und Erfah-



rungen können sogar zu widersinniger Modellierung führen und damit zu völlig falschen Ergebnissen, die nichts mit den Verfahrensfehlern der FEM zu tun haben.

Nachfolgend werden FEM-Verfahrensfehler diskutiert.

Pauschal gilt: Mit zunehmender Anzahl der Knoten konvergiert die Lösung der FEM gegen den exakten Wert. Die Erhöhung der Knotenanzahl kann auf zwei Wegen realisiert werden:

- a) Mehr Elemente verwenden, d. h. die Vernetzung des Gebietes verfeinern. Dieser Weg führt zur "h-Konvergenz".
- b) Elemente mit Ansätzen höherer Ordnung verwenden: "p-Konvergenz".

Beide Wege haben ihre spezifischen Grenzen. Der Grad der Ansatzfunktion kann nicht beliebig erhöht werden, weil dann der Umfang der daraus folgenden Elementmatrizen lawinenartig ansteigt. (Dieser Sachverhalt wird bereits beim Übergang zum quadratischen Verschiebungsansatz im Abschnitt 2.3.2. deutlich.)

Andererseits kann eine Struktur auch nicht mit einfachen Elementen beliebig fein vernetzt werden, weil damit die Anzahl der Freiheitsgrade und somit die Größe des zu lösenden Gleichungssystems ebenso wie bei p-Konvergenz die Speicherkapazität und Rechenzeit jedes Computers überfordert. Außerdem treten bei zu großer Knotenanzahl für beide Wege numerische Instabilitäten beim Lösen des Gleichungssystems auf.

Finite Elemente mit Verschiebungsansätzen führen gegenüber der exakten Lösung auf zu große Steifigkeit, d. h. es werden zu kleine Verformungen und Spannungen und zu große Eigenfrequenzen berechnet.

Diese Aussage gilt jedoch nur für das Gesamtgebiet. Für lokale Gebiete, insbesondere bei Spannungskonzentration, kann das Gegenteil zutreffen!

Begründet ist dieses Paradoxon durch die Tatsache, daß die FEM ein Gebietswertverfahren darstellt. Der Wert des elastischen Gesamtpotentials wird aus der Summe der Elementpotentiale gebildet, wobei die Elementpotentiale jeweils größer oder kleiner als der exakte Wert sein können. Daraus folgt,

daß jede Vernetzung einer Struktur in finite Elemente ein spezifisches und mathematisch nicht erfaßbares Konvergenzverhalten der lokalen Gebiete zur Folge hat. Die Konvergenz kann vom Nutzer durch folgende Maßnahmen überprüft werden:

- a) Vergleich mit analytischen Lösungen
- b) Vergleich mit experimentellen Ergebnissen
- c) Iterative Netzverfeinerung und Vergleich der Lösungen untereinander.

Die Maßnahme a) setzt das Vorhandensein eines analytischen Berechnungsmodells voraus, das weitgehend der FEM-Struktur entspricht. Ansonsten ist der Vergleich infolge eines zu großen Modellierungsfehlers zwischen dem analytischen und numerischen (FEM) Berechnungsmodell unzulässig!

Beim Vergleich mit experimentellen Ergebnissen ist wieder der Modellierungsfehler zu beachten und darüber hinaus der Einfluß unvermeidbarer meßtechnischer Fehler.

Die Maßnahme c) ist nur für lokale Gebiete zu empfehlen, weil ansonsten die Kapazität des Computers schnell erschöpft ist.

Zur Unterstützung des Nutzers bei der Beurteilung lokaler Konvergenz gibt es trotz der genannten Schwierigkeiten programmtechnische Hilfsmittel. Bei derartigen (indirekten) Verfahren wird der Effekt ausgenutzt, daß eine genaue Verformungs-Lösung kontinuierlichere Verteilungen der inneren Kräfte und der Spannungen liefert als eine schlechtere Lösung. Als Bewertungskriterien sind unter anderem möglich /18/: Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen im Element, Spannungsunterschiede am Rand, sowie Spannungsunterschiede angrenzender Elemente je Knotenpunkt. Darüber hinaus können auch Diskontinuitäten von Energieverteilungen als Kriterium verwendet werden /19/.

Spannungsunterschiede an Knotenpunkten gelten als besonders böses Fehlerkriterium und wurden bereits von Schnack /20/ für rotationssymmetrische Probleme zur Ermittlung oberer Fehlerschranken eingesetzt.

Der Fehler in den Spannungsverteilungen wird generell durch lokale Mittelung geometrisch angrenzender Werte gesenkt.

In GITRA3 werden an jedem Knotenpunkt die Spannungen angrenzender Flächenelemente zu einer Knoten-Spannung gemittelt. Außerdem werden relative Knoten-Spannungssprünge  $\overline{\Delta\sigma}$  (in %) für jeden Knoten nach folgender Formel berechnet:

$$\overline{\Delta\sigma}_i = \frac{\Delta\sigma_{v \max i}}{\overline{\sigma}_{v \max ges}} \quad (57)$$

mit  $\Delta\sigma_{v \max i}$  : Max. Sprung der Vergleichsspannung am Knoten i (in MPa)

$\overline{\sigma}_{v \max ges}$  : Größte gemittelte Knoten-Vergleichsspannung in der gesamten Struktur (in MPa)

wobei als Vergleichsspannung die Spannung  $\sigma_v$  nach der Gestaltänderungsenergiehypothese benutzt wird (für die Spannungen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  in der  $\overline{xy}$ -Ebene des EKS) :

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3 \tau_{xy}^2} \quad (58)$$

Die Verwendung einer Vergleichsspannung (skalare Spannungsgröße) erleichtert die Mittelung der Elementspannungen in den Knoten.

Vom Anwender kann von vornherein eine geringe Fehlerquote erzielt werden, wenn die Vernetzung an die zu erwartende Spannungsverteilung in der Struktur angepaßt wird /21/, d. h. bei Spannungskonzentration muß feiner vernetzt werden als in Gebieten mit gleichmäßiger Spannungsverteilung. Weil die Spannungsverteilung nicht nur von der Geometrie der Struktur abhängt, müßte für jeden statischen Lastfall und jede Eigenschwingform eine optimale Vernetzung gesucht werden, wenn der Fehler absolut minimal sein soll.

Die in GITRA3 angegebenen relativen Spannungssprünge sind nur als Orientierungshilfe für schlechte Vernetzungen zu werten. Der tatsächliche Fehler kann schon deshalb niedriger sein, weil die angegebenen Knotenspannungen gemittelte Werte darstellen.

## 2.8. Anwendung der FEM auf Schwingungsprobleme

### 2.8.1. Das Bewegungs-Differentialgleichungssystem für ungedämpfte Schwingungen

Der Ausgangspunkt für dynamische Berechnungen ist das Hamiltonsche Prinzip:

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt \Rightarrow \text{stationär} \quad (59)$$

mit der Lagrangeschen Funktion

$$L = T - \Pi \quad (60)$$

und  $T$  : kinetische Energie,  $\Pi$  : elastisches Potential,

$t$  : Zeit

Wie bei der Behandlung statischer Probleme gilt Gl. (59) ebenfalls elementweise, d. h. für 1 Element gilt:

$$\int_{t_1}^{t_2} L_e dt \Rightarrow \text{stationär} \quad (61)$$

mit

$$L_e = T_e - \Pi_e \quad (62)$$

Die kinetische Energie eines Elementes lautet:

$$T_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{v}_e^T \dot{v}_e dV \quad (63)$$

mit  $\rho$  : Dichte und  $\dot{v}_e(x,y,z)$  : kontinuierliches Geschwindigkeitsfeld je Element und  $( )^{\cdot} = \frac{d( )}{dt}$  Zeitableitung

Gl. (63) stellt eine Erweiterung der bekannten skalaren Beziehung

$$T = \frac{1}{2} mw^2 \quad \text{mit} \quad m = \rho \cdot V$$

für die kinetische Energie einer Masse  $m$  dar, die eine Geschwindigkeit  $w$  besitzt.

Analog zur Statik wird die kontinuierliche Geschwindigkeit  $\dot{v}_e$  durch eine an den Knoten gültige Geschwindigkeit  $\dot{u}_e$  er-

setzt. Auch hier wird eine Formfunktionsmatrix verwendet:

$$\dot{\underline{u}}_e = \tilde{\underline{G}} \dot{\underline{u}}_e \quad (64)$$

Die Matrix  $\tilde{\underline{G}}$  muß nicht mit der Matrix  $\underline{G}$  für den statischen Verschiebungsansatz übereinstimmen.

Mit (64) wird (63) zu:

$$T_e = \frac{1}{2} \dot{\underline{u}}_e^T \underline{M}_e \dot{\underline{u}}_e \quad (65)$$

Dabei ist  $\underline{M}_e$  die Elementmassenmatrix

$$\underline{M}_e = \rho \int_V \tilde{\underline{G}}^T \tilde{\underline{G}} dV \quad (66)$$

Einsetzen von (17) und (61) in (58) liefert die Lagrangesche Funktion für ein Element:

$$L_e = \frac{1}{2} \dot{\underline{u}}_e^T \underline{M}_e \dot{\underline{u}}_e - \frac{1}{2} \underline{u}_e^T \underline{C}_e \underline{u}_e + \underline{u}_e^T \underline{f}_e \quad (67)$$

Zu jedem Variationsproblem gehört ein Satz Eulerscher Differentialgleichungen, der das Problem völlig äquivalent beschreibt.

Die zum Variationsproblem (59) bzw. (61) gehörenden Eulerschen Differentialgleichungen lauten:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_e}{\partial \dot{\underline{u}}_e} \right) - \frac{\partial L_e}{\partial \underline{u}_e} = \underline{0} \quad (68)$$

In der Mechanik bezeichnet man diese Gleichungen als Lagrangesche Bewegungsgleichungen 2. Art.

Gl. (68) angewendet auf (67) führt auf das Bewegungs-Differentialgleichungssystem für 1 Element:

$$\underline{M}_e \ddot{\underline{u}}_e + \underline{C}_e \underline{u}_e = \underline{f}_e \quad (69)$$

mit  $\ddot{\underline{u}}_e$ : Knotenbeschleunigungsvektor des Elementes. Damit wird die Statik um Trägheitskräfte  $\underline{M}_e \ddot{\underline{u}}_e$  erweitert.

Für die Gesamtstruktur entsteht das große Bewegungs-Differentialgleichungssystem

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}}(t) + \underline{C} \underline{u}(t) = \underline{f}(t) \quad (70)$$

mit  $\underline{M}$  Strukturmassenmatrix  
 und  $\ddot{\underline{u}}$  Struktur-Knotenbeschleunigungsvektor (in Richtungen des Strukturkoordinatensystems).

### 2.8.2. Eigenwertberechnung für ungedämpfte Schwingungen

Für freie Schwingungen (d. h. für gelagerte Strukturen ohne äußere Schwingungsanregung) wird (70) zu:

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}}(t) + \underline{C} \underline{u}(t) = \underline{0} \quad (71)$$

Zur Ermittlung der daraus folgenden Eigenwerte genügt ein einfacher Lösungsansatz:

$$\underline{u}(t) = \underline{x} \cdot \cos \omega t \quad (72)$$

Damit werden die (jetzt zeitabhängigen) unbekanntenen Knotenverschiebungen  $\underline{u}(t)$  der schwingenden Struktur durch unbekanntene zeitunabhängige Amplituden  $\underline{x}$  für jeden Freiheitsgrad und die zugehörige unbekanntene Eigenkreisfrequenz  $\omega$  ersetzt.  $\lambda = \omega^2$  wird als Eigenwert bezeichnet,  $\underline{x}$  ist der Eigenvektor, der die Eigenschwingform der Struktur bildet. Zu jedem Eigenwert gehört eine Schwingform. In Bild 18 ist für einen Freiheitsgrad der Ansatz (72) dargestellt.

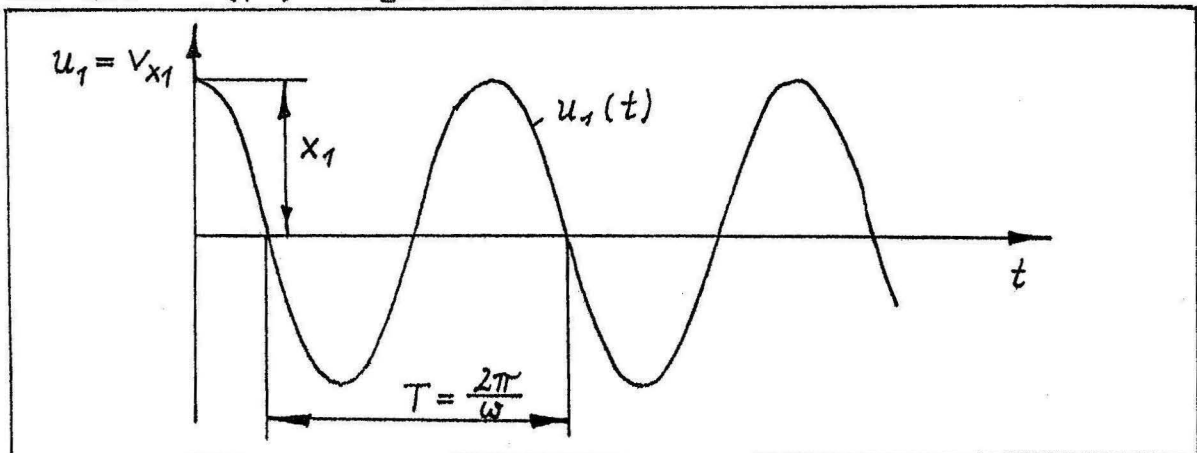


Bild 18: Knotenverschiebung  $v_x$  eines Punktes "1" als harmonische Zeitfunktion  $u_1(t)$  mit Schwingungsdauer  $T$

Aus (72) folgt:

$$\ddot{\underline{u}}(t) = -\omega^2 \underline{x} \cos \omega t \quad (73)$$

Einsetzen von (72) und (73) in (71) liefert:

$$\boxed{\underbrace{(\underline{C} - \omega^2 \underline{M})}_{\underline{S}} \underline{x} = \underline{0}} \quad (74)$$

mit  $\underline{S}$  : charakteristische Matrix

(74) wird als allgemeines Matrizen-Eigenwertproblem bezeichnet (Eigenwertproblem des Matrizenpaares  $\underline{C}$  und  $\underline{M}$ ).

Zur Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren stehen direkte und iterative Lösungsverfahren zur Verfügung.

#### a) Direkte Eigenwertlösung

Das Gleichungssystem (74) hat nur dann nichttriviale Lösungen ungleich Null, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet:

$$\det \underline{S} = \left| \underline{C} - \omega^2 \underline{M} \right| = 0 \quad (75)$$

Aus (71) folgt mit  $\lambda = \omega^2$  die "charakteristische Gleichung":

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (76)$$

Die Koeffizienten  $a_0$  bis  $a_n$  entstehen durch Ausmultiplizieren der Determinante. Die Nullstellen  $\lambda_k$  ( $k = 1$  bis  $n$ ) dieser Polynomgleichung sind die gesuchten Eigenwerte. Während bei Kontinuum-Strukturen theoretisch unendlich viele Eigenwerte existieren, kann es bei FEM-Strukturen nur soviel Eigenwerte  $n$  wie Freiheitsgrade geben, wobei aber die höheren Eigenwerte sehr stark von der Strukturidealisierung abhängen und damit immer schlechter das tatsächliche Schwingungsverhalten repräsentieren.

Wenn die Nullstellen  $\lambda_k$  durch ein geeignetes Lösungsverfahren

bekannt sind, wird jeder berechnete Eigenwert einzeln in Gl. (74) eingesetzt und damit die zugehörige Schwingform  $\underline{x}_K$  berechnet.

Infolge des Vektors  $\underline{0}$  auf der rechten Seite in (74) sind grundsätzlich nur normierte Werte für jeden Eigenvektor  $\underline{x}_K$  ermittelbar.

Im allgemeinen wird je Schwingform willkürlich ein Freiheitsgrad als Bezugsgröße verwendet, für den nach der Berechnung im Ergebnis eine 1 erscheint.

In GITRA3 wird jede Schwingform so normiert, daß die jeweils größte Amplitude aller Verschiebungswerte gleich 1 ist. Damit können bei den Verdrehungen durchaus Werte größer 1 erscheinen!

Gl. (76) ist nur für kleine  $n$  praktikabel lösbar, weil die Nullstellenermittlung schon für  $n > 3$  erhebliche Schwierigkeiten bereitet. Deshalb werden als Alternative iterative Verfahren bei der numerischen Berechnung bevorzugt.

#### b) Iterative Eigenwertlösungen

Zu diesem Lösungsverfahren gehört zunächst die Rotationsmethode nach Jacobi /12/, /22/. Dabei wird schrittweise die Steifigkeits- und die Massenmatrix jeweils zu einer Diagonalmatrix überführt. Aus den Diagonalmatrizen werden dann alle Eigenwerte und Eigenvektoren des Systems ermittelt. Weil alle Werte berechnet werden, ist auch diese Methode für eine große Freiheitsgrad-Anzahl nicht zu empfehlen.

In der Dynamik sind vorwiegend die niedrigsten Eigenwerte von Interesse. Deshalb sind iterative Verfahren günstiger, die nur einen oder wenige Eigenwerte am Rande des Spektrums liefern. Dazu gehört die Vektoriteration nach v. Mises (Potenzmethode) für den betragsgrößten Eigenwert, bzw. die inverse Vektoriteration für den niedrigsten Eigenwert. Zur gleichzeitigen Berechnung mehrerer niedrigster Eigenwerte steht die simultane inverse Vektoriteration zur Verfügung. Auch hier existieren bereits verschiedene Lösungsalgorithmen, die sich darin unterscheiden, wie nach jedem Iterationsschritt die notwendige Orthogonal-



sierung durchgeführt wird. In GITRA3 wird als simultane inverse Vektoriteration das leistungsfähige Subspace-Verfahren nach McGormick und Noe /23/, /24/ verwendet. Bei diesem auch in COSAR verwendeten Verfahren /25/ wird das große Eigenwertproblem auf ein kleines Eigenwertproblem reduziert, bei dem nur die  $p$  kleinsten interessierenden Eigenwerte berechnet werden (mit  $p \ll n$ ).

Die inverse Vektoriteration beinhaltet formal eine einmalige Invertierung der Struktursteifigkeitsmatrix  $\underline{C}$ . Dieser aufwendige Lösungsschritt kann wieder rationell mit dem Cholesky-Verfahren realisiert werden. Vor Beginn der Eigenwert-Iteration erfolgt deshalb in GITRA3 stets eine Cholesky-Zerlegung der Struktursteifigkeitsmatrix, auch wenn zuvor kein statischer Lastfall berechnet wurde.

Nach jedem Iterationsschritt wird vom Programm getestet, wie groß die maximale relative Abweichung  $r \lambda_{\max}$  der berechneten Eigenwerte bezüglich des vorhergehenden Iterationsschrittes ist:

$$r \lambda_{\max} = \max_{k=1}^p \left| \frac{\lambda_{kalt} - \lambda_{kneu}}{\lambda_{kneu}} \right| \quad (77)$$

mit  $p$  : Anzahl der gewünschten Eigenwerte

$\lambda_{kneu}$  :  $k$ -ter Eigenwert des aktuellen Iterationsschrittes

$\lambda_{kalt}$  :  $k$ -ter Eigenwert des vorhergehenden Iterationsschrittes

Sind alle  $k$  Abweichungen kleiner als eine vorgegebene Schranke EPS d. h. wenn

$$r \lambda_{\max} < EPS \quad (78)$$

dann ist die Berechnung gut genug und wird mit Ergebnis-Ausgabe für Eigenfrequenzen  $f_k = \omega_k / 2\pi$  und genormte Eigenschwingformen beendet. In GITRA3 kann vom Nutzer eine Abbruchgrenze von

EPS = 0,5 Prozent oder ein anderer Wert

verwendet werden. (Mit  $\text{EPS} = 0,5 \%$  wird eine Genauigkeit von 2 Ziffern für alle berechneten Eigenwerte garantiert, oder mit  $\text{EPS} = 0,005 \%$  sind 4 Ziffern genau).

### 2.8.3. Erzwungene gedämpfte Schwingungen

Ohne Dämpfung ("konservative Schwingung") gilt das Bewegungsdifferentialgleichungssystem (70).

In GITRA3 sind vorerst erzwungene Schwingungen mit geschwindigkeitsproportionaler (viskoser) Dämpfung vorgesehen. Dafür gilt das inhomogene Differentialgleichungssystem:

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}}(t) + \underline{B} \dot{\underline{u}}(t) + \underline{C} \underline{u}(t) = \underline{f}(t) \quad (79)$$

- mit  $\underline{B}$  Strukturdämpfungsmatrix, symmetrisch  
 $\dot{\underline{u}}(t)$  Struktur-Knotengeschwindigkeitsvektor (in Richtung des Strukturkoordinatensystems)  
 $\underline{f}(t)$  zeitabhängiger Struktur-Kraftvektor

Die mit der symmetrischen Matrix  $\underline{B}$  repräsentierte Dämpfung entsteht z. B. bei Schwingungen der Struktur in einem ruhenden, viskosen Medium. Nicht erfaßt wird damit Dämpfung infolge Anströmung oder bei Rotation. Derartige Effekte führen auf eine nichtsymmetrische Dämpfungsmatrix  $\underline{B}$ .

Weiterhin wird mit  $\underline{B}$  keine Werkstoffdämpfung infolge innerer Reibungsverluste (Hysterese im Spannungs-Dehnungs-Diagramm) erfaßt. Trotzdem kann die Werkstoffdämpfung näherungsweise mit viskoser Dämpfung modelliert werden, so daß auch wieder Gl. (79) anwendbar wird.

Bei FEM-Strukturen ist die Unterscheidung in zwei viskose Dämpfungsarten zweckmäßig:

- a) Global wirkende Dämpfung, proportional zu bestimmten Eigenschaften der Struktur ("proportionale Dämpfung")
- b) Lokal wirkende Dämpfung ("diskrete" oder "allgemeine Dämpfung")

Die global wirkende Dämpfung wird mit Hilfe eines Lehrschen

Dämpfungsmaßes beschrieben. So kann z. B. experimentell je Schwingform ein Lehrsches Dämpfungsmaß ermittelt werden. Bei proportionaler Dämpfung entstehen in der Matrix  $\underline{B}$  nur Werte auf der Hauptdiagonalen.

Bei lokal wirkender Dämpfung werden Dämpferelemente analog zu Federelementen verwendet und vom Anwender sind Dämpferkonstanten in gleicher Weise wie Federkonstanten für Translationen und Drehungen bezüglich des Elementkoordinatensystems vorzugeben. Derartige Dämpferelemente belegen in der Matrix  $\underline{B}$  immer einzelne Werte unabhängig von der Hauptdiagonalen.

Jede Berücksichtigung von Dämpfung führt auf ein komplexes Eigenwertproblem und erfordert daher einen höheren Berechnungsaufwand als für konservative Schwingungen.

Bei der Analyse erzwungener Schwingungen interessiert jedoch häufig nur das Schwingungsverhalten an einem bestimmten Punkt der Struktur, mitunter nur für einen Freiheitsgrad. In diesen Fällen kann erheblich Rechenzeit eingespart werden, so daß auch erzwungene gedämpfte Schwingungen mit vertretbarem Aufwand berechnet werden können, Bild 19.

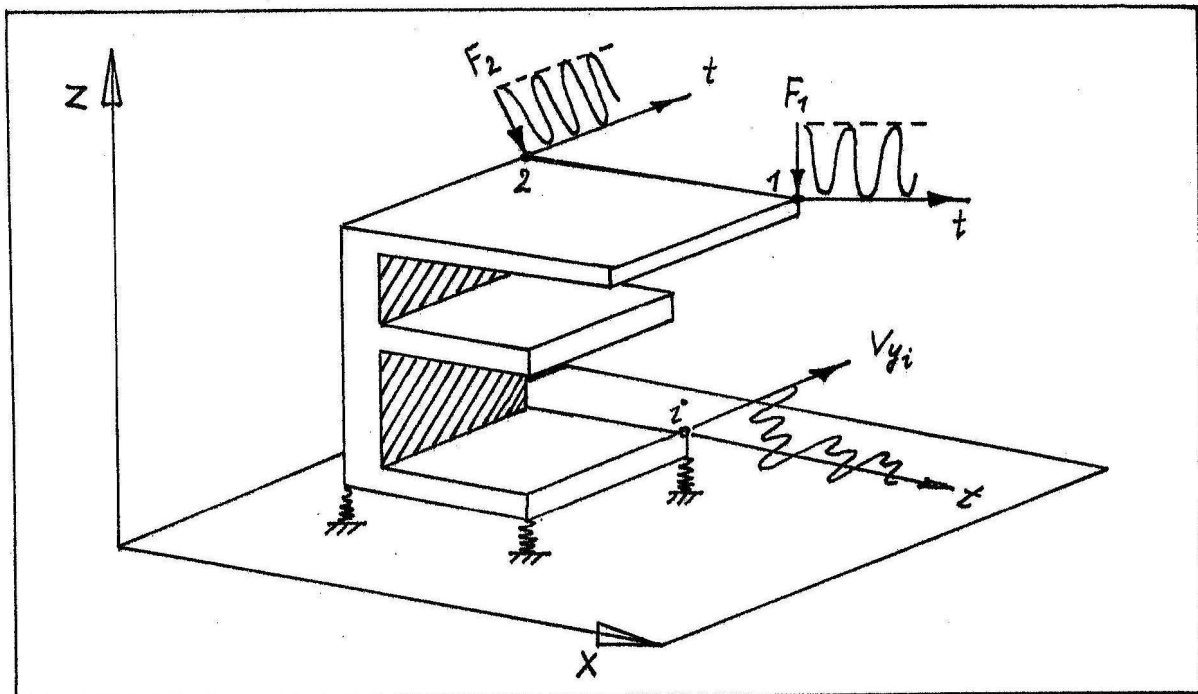


Bild 19: Schwingungsantwort  $v_{y_i}(t)$  am Knoten  $i$  infolge harmonischer Schwingungserregung an den Knoten 1 und 2 ( $t$  : Zeitachse)

Zur Berechnung der Schwingungsantwort gibt es zwei prinzipielle Möglichkeiten :

- a) Behandlung im Zeitbereich durch numerische Integration der Bewegungsdifferentialgleichungen. Ergebnis ist eine Zeitfunktion (d. h. Amplitude in Abhängigkeit von der Zeit) für einen oder mehrere gewählte Freiheitsgrade.
- b) Behandlung im Frequenzbereich durch Frequenzgang-Berechnung Ergebnis ist ein komplexer Frequenzgang (d. h. Amplitude und Phasenwinkel in Abhängigkeit von der Frequenz) für einen oder mehrere gewählte Freiheitsgrade. Nur für gedämpfte Schwingungen ist der Frequenzgang komplex. Für ungedämpfte Schwingungen spielen die Phasenwinkel keine Rolle, so daß nur der Amplituden-Frequenzgang (Resonanzkurve) angegeben wird.

Die in Bild 19 dargestellte Schwingungsantwort kann auf Grund der genannten zwei Möglichkeiten entweder als Zeitfunktion  $v_{yi}(t)$  oder als Frequenzgang (z. B. Amplitudenbetrag  $v_{yi}(f)$ ) interpretiert werden, Bild 20.

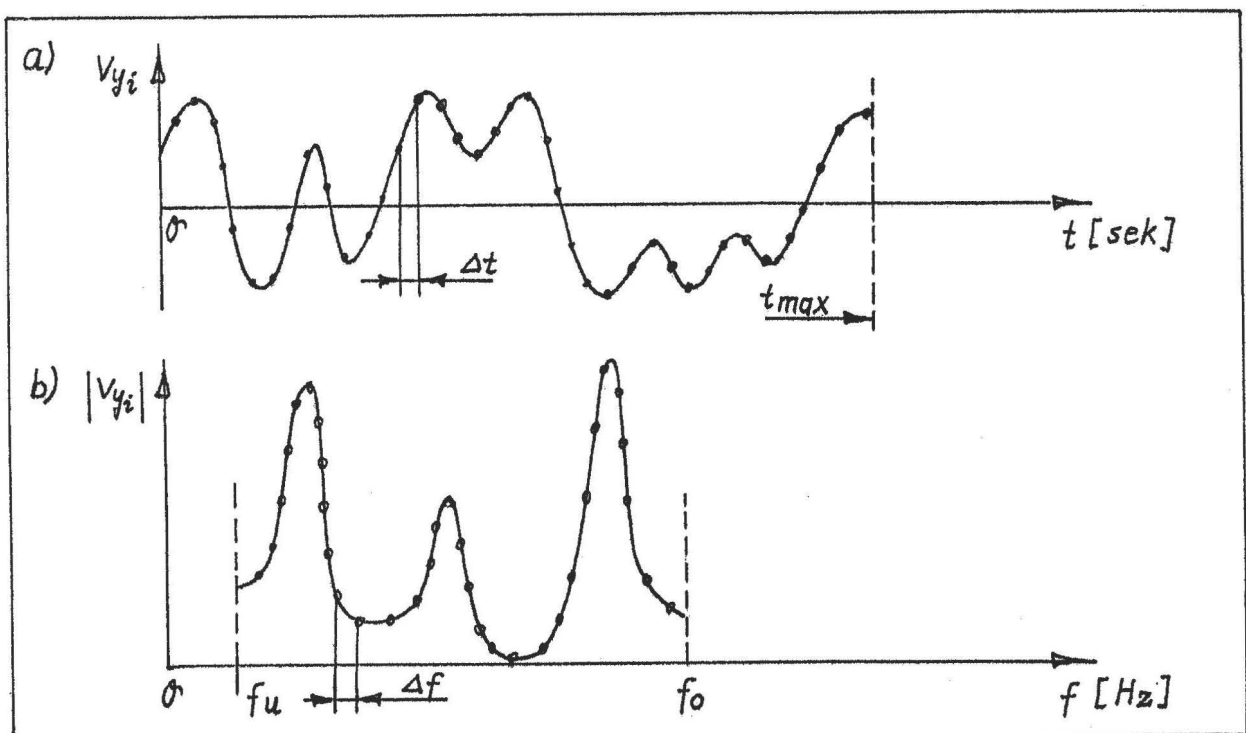


Bild 20: Mögliche Ergebnisse zur Berechnung der Schwingungsantwort  $v_y$  am Knoten  $i$  : a) Nach numerischer Integration b) Nach Frequenzgangberechnung

In beiden Fällen entstehen diskrete Werte. So werden für die Zeitfunktion  $v_{y_i}(t)$  diskrete Werte in Zeitintervallen  $t$  bereitgestellt, und für den Frequenzgang entstehen in Frequenzintervallen  $f$  diskrete Werte. Beim komplexen Frequenzgang wird häufig die Darstellung der Amplitudenbeträge bevorzugt.

Die numerische Integration erfolgt für einen begrenzten Zeitbereich bis  $t = t_{\max}$ . Analog dazu wird der Frequenzgang nur in einem begrenzten Frequenzbereich zwischen einer unteren Grenzfrequenz  $f_u$   $0$  und einer oberen Grenzfrequenz  $f_o$  ermittelt.

Die Behandlung im Zeitbereich über numerische Integration ist vor allem bei allgemeiner (z. B. "transienter") Schwingungserregung  $\underline{f}(t)$  zu empfehlen. Dafür kann der Modul GITZI (Numerische Zeitintegration für transiente Schwingungserregung) des Programmsystems GITRA3 genutzt werden.

Bei harmonischer Erregung  $\underline{f}(t)$  ist eine Frequenzgang-Berechnung effektiver. Diese Berechnung wird in GITRA3 mit dem Modul GITFG (Frequenzgang-Berechnung für harmonische Kraft- und Wegerregung) realisiert.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß erzwungene Schwingungen möglichst unter Einbeziehung von Dämpfungen analysiert werden sollten, weil erst durch Dämpfung ein stationäres Schwingungsverhalten erzeugt wird.

### 3. Die Elemente in GITRA3

Sämtliche Knoten haben sechs Freiheitsgrade: Drei Knotenverschiebungen  $v_x, v_y, v_z$  und drei Knotenverdrehungen  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ . Daraus folgen einheitlich (6x6)-Untermatrizen  $\underline{C}_{ij}$  bzw.  $\underline{M}_{ij}$ .

#### 3.1. Timoshenko-Balken

Im Unterschied zum Bernoulli-Balken des Abschnittes 2.3.3. wird in GITRA3 zusätzlich Querkraftschub und Rotationsträgheit der bei Schwingungen kippenden Querschnitte mit berücksichtigt. Ein derartiges Balkenmodell wird als Timoshenko-Balken bezeichnet.

Weiterhin handelt es sich bei GITRA3 um räumliche Balken, so daß in Erweiterung zum ebenen Balken Torsion um die Längsachse  $\bar{x}$ , Biegung und Rotationsträgheit um die  $\bar{y}$ -Achse, sowie Querkraftschub in  $\bar{z}$ -Richtung möglich ist.

Neben den Materialkennwerten und den Knotenkoordinaten werden je Balken vom Anwender nur Querschnittskennwerte in das Programm eingegeben. Damit können Balken mit beliebigen Querschnittsformen rationell modelliert werden, siehe Anlage (Anwendungsbeschreibung).

##### 3.1.1. Elementsteifigkeitsmatrix

Wie jedes "Zweieck"-Element hat auch der Balken (Knoten i und j) eine aus 4 Untermatrizen bestehende Elementsteifigkeitsmatrix, von denen 3 explizit zu berechnen sind:

$$\underline{C}_e = \begin{pmatrix} \underline{C}_{ii} & \underline{C}_{ij} \\ T & \\ \underline{C}_{ij} & \underline{C}_{jj} \end{pmatrix} \quad (80)$$

Für den räumlichen Timoshenko-Balken lautet die Untermatrix  $\underline{C}_{ii}$  /26/, /27/:

$$\underline{C}_{ii} = \begin{pmatrix}
 v_x & v_y & v_z & f_x & f_y & f_z \\
 \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{12EI_z}{l^3 Q_y} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2 Q_y} \\
 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3 Q_z} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2 Q_z} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{GI_t}{l} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2 Q_z} & 0 & \frac{(Q_z+3)EI_y}{l Q_z} & 0 \\
 0 & \frac{6EI_z}{l^2 Q_y} & 0 & 0 & 0 & \frac{(Q_y+3)EI_z}{l Q_y}
 \end{pmatrix} \quad (81)$$

mit  $E$  : Elastizitätsmodul  
 $A$  : Querschnittsfläche,  $l$  Länge des Balkens  
 $I_z, I_y$  : Flächenträgheitsmomente um die Achsen  $\bar{z}$  und  $\bar{y}$  des EKS  
 $G$  : Gleitmodul  
 $I_t$  : Torsionsträgheitsmoment

und

$$Q_z = \frac{12 E I_y \alpha_z}{G \cdot A \cdot l^2} + 1 ; \quad Q_y = \frac{12 E I_z \alpha_y}{G \cdot A \cdot l^2} + 1$$

mit  $\alpha_z, \alpha_y$  : Schubverteilungszahlen in  $\bar{z}$ - und  $\bar{y}$ -Richtung /28/, /29, S. 209/

Die Untermatrix  $\underline{C}_{ij}$  hat die folgende Form:

$$\underline{C}_{ij} = \begin{pmatrix}
 -\otimes & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\otimes & 0 & 0 & 0 & +\otimes \\
 0 & 0 & -\otimes & 0 & -\otimes & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\otimes & 0 & 0 \\
 0 & 0 & +\otimes & 0 & -\frac{(Q_z-3)EI_y}{l Q_z} & 0 \\
 0 & -\otimes & 0 & 0 & 0 & -\frac{(Q_y-3)EI_z}{l Q_y}
 \end{pmatrix} \quad (82)$$

mit  $\otimes$  Betrag wie in  $\underline{C}_{ii}$

$\underline{C}_{jj}$  ist wieder symmetrisch:

$$\underline{C}_{jj} = \begin{pmatrix} +\otimes & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & +\otimes & \emptyset & \emptyset & \emptyset & -\otimes \\ \emptyset & \emptyset & +\otimes & \emptyset & +\otimes & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & +\otimes & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & +\otimes & \emptyset & +\otimes & \emptyset \\ \emptyset & -\otimes & \emptyset & \emptyset & \emptyset & +\otimes \end{pmatrix} \quad (83)$$

Die Matrix  $\underline{C}_e$  liefert auch hier wie beim ebenen Balken den exakten Zusammenhang zwischen Belastung und Verformung und kann sowohl direkt als auch über Hermite-Polynomansätze hergeleitet werden (wobei auch im räumlichen Fall nur maximal kubische Terme für die Biegelinie in der  $\bar{x}$ - $\bar{y}$ -Ebene bzw. in der  $\bar{x}$ - $\bar{z}$ -Ebene entstehen).

### 3.1.2. Elementmassenmatrix

Analog zur Matrix  $\underline{C}_e$  gilt für die Matrix  $\underline{M}_e$  :

$$\underline{M}_e = \begin{pmatrix} M_{ii} & M_{ij} \\ T & M_{jj} \\ M_{ij} & M_{jj} \end{pmatrix} \quad (84)$$

$\underline{M}_e$  ist jetzt nicht mehr exakt berechenbar und muß über Formfunktionsmatrizen  $\tilde{\underline{G}}$  gemäß Gl. (66) hergeleitet werden.

Der einfachste Ansatz für die mögliche dynamische Verformung ist die statische Verformung:

$$\tilde{\underline{G}} = \underline{G} \quad (85)$$

Mit (66) und (29) folgt daraus z. B. für den ebenen Bernoulli-Balken des Abschnittes 2.3.3.:



$$\underline{M}_e = \rho A l \begin{pmatrix}
 \begin{array}{ccc|ccc}
 v_{xi} & v_{yi} & f_{zi} & v_{xj} & v_{yj} & f_{zj} \\
 \hline
 \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{13}{35} & \frac{11}{210} l & 0 & \frac{9}{70} & -\frac{13}{420} l \\
 0 & \frac{11}{210} l & \frac{1}{105} l^2 & 0 & \frac{13}{420} l & -\frac{1}{140} l^2 \\
 \hline
 & & \underline{M}_{ij}^T & & & \\
 & & & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
 & & & 0 & \frac{13}{35} & -\frac{11}{210} l \\
 & & & 0 & -\frac{11}{210} l & \frac{1}{105} l^2
 \end{array}
 \end{pmatrix} \quad (86)$$

Natürlich können mit den in (29) enthaltenen kubischen Termen nur Schwingformen niederer Ordnung hinreichend genau approximiert werden. Für höhere Schwingformen ist eine Zerlegung in mehrere Balkenabschnitte erforderlich. So führt auch hier - wie bei ebenen finiten Elementen - eine "feinere Vernetzung" zu einer besseren Lösung.

Für den räumlichen Bernoulli-Balken entsteht eine  $(3 \times 12)$ -Matrix  $\underline{G}$ , die auch nur maximal kubische Terme enthält /26/, /27/. Gleichung (66) liefert dafür eine Elementmassenmatrix  $\underline{M}_e$  mit Untermatrizen  $\underline{M}_{ii}$ ,  $\underline{M}_{ij}$  und  $\underline{M}_{jj}$ , bei denen die gleichen Matrizenelemente mit Werten belegt sind wie bei den Untermatrizen der Matrix  $\underline{C}_e$ .

Beim Timoshenko-Balken sind durch die Einbeziehung des Querkraftschubes und der Rotationsträgheit die Matrizenelemente in  $\underline{M}_e$  komplizierter als in  $\underline{C}_e$ , z. B.

$$\underline{M}_{ii}(1,1) = \frac{1}{3} \rho A l$$

$$\underline{M}_{ii}(2,2) = \frac{\rho A l}{(1 + \tilde{Q}_y)^2} \cdot \left[ \frac{13}{35} + \frac{7}{10} \tilde{Q}_y + \frac{1}{3} \tilde{Q}_y^2 \right] + \frac{6}{5} \left[ \frac{\rho I_z}{l(1 + \tilde{Q}_y)^2} \right]$$

$$\underline{M}_{ii}(3,3) = \frac{\rho A l}{(1 + \tilde{Q}_z)^2} \cdot \left[ \frac{13}{35} + \frac{7}{10} \tilde{Q}_z + \frac{1}{3} \tilde{Q}_z^2 \right] + \frac{6}{5} \left[ \frac{\rho I_y}{l(1 + \tilde{Q}_z)^2} \right] \quad (87)$$

$$\text{mit } \tilde{Q}_y = Q_y - 1 \quad \text{und} \quad \tilde{Q}_z = Q_z - 1$$

Der erste Term in  $\underline{M}_{ii}$  (2, 2) oder  $\underline{M}_{ii}$  (3, 3) repräsentiert die Translationsträgheit und der zweite Term die Rotationsträgheit, wobei in beiden Fällen Querkraftschub wirkt.

Wird in GITRA3 ohne Querkraftschub gearbeitet (Schubverteilungszahlen  $\alpha_y = \alpha_z = 0$ ), so werden damit Rayleigh-Balken berechnet. Bei diesem Balkenmodell wird gegenüber dem Bernoulli-Balken zusätzlich bei Schwingungen die Rotationsträgheit der kippenden Querschnitte berücksichtigt, z. B.

$$\underline{M}_{ii} (2, 2) = \underbrace{\frac{13}{35} \cdot \rho A l}_{\text{Bernoulli}} + \frac{6}{5} \cdot \frac{\rho I_z}{I} \quad (88)$$

Rayleigh-Balken

Die Elementmassenmatrix des räumlichen Timoshenko-Balkens wurde bereits von Archer /30/, /31/ hergeleitet (zitiert in /26/).

### 3.2. Masseloses Federelement

Das Federelement repräsentiert 3 Translationsfedern und 3 Drehfedern.

Die Elementsteifigkeitsmatrix  $\underline{C}_e$  besteht auch hier aus 4 (6x6)-Untermatrizen gemäß Gl. (80):

$$\underline{C}_{ii} = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|cccccc} V_x & V_y & V_z & \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ \hline C_{Tx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{Ty} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} l C_{Ty} \\ 0 & 0 & C_{Tz} & 0 & -\frac{1}{2} l C_{Tz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{Dx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} l C_{Tz} & 0 & C_{Dy} + \frac{1}{3} l^2 C_{Tz} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} l C_{Ty} & 0 & 0 & 0 & C_{Dz} + \frac{1}{3} l^2 C_{Ty} \end{array} & \end{pmatrix} \quad (89)$$

mit:  $C_{Tx}$ ,  $C_{Ty}$ ,  $C_{Tz}$  : Translationsfedern

$C_{Dx}$ ,  $C_{Dy}$ ,  $C_{Dz}$  : Drehfedern

bezüglich der Achsen  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$  des Elementkoordinatensystems

$\underline{C}_{ij}$  und  $\underline{C}_{jj}$  : Belegung analog zu  $\underline{C}_{ii}$  und Vorzeichenregelung wie beim Balken, aber:

$$\underline{C}_{ij} \quad (5, 5) = -C_{Dy} + \frac{1}{6} l^2 C_{Tz} \quad (90)$$

$$\underline{C}_{ij} \quad (6, 6) = -C_{Dz} + \frac{1}{6} l^2 C_{Ty}$$

Mit dem in GITRA3 enthaltenen Federelement wird auch eine Kopplung zwischen Querkraft und Biegung bei beliebigen Federlängen realisiert. Das im Großrechner-Programm GITRA II implementierte Federelement ohne Biegekopplung (nur für Federlänge  $l = 0$  exakt) ist als Sonderfall mit enthalten, wenn sehr kleine Federlängen angegeben werden.

Bei Federlängen  $l = 0$  wird in GITRA3 das EKS automatisch parallel zum SKS gesetzt.

### 3.3. Masseloses Starrelement

Beim Starrelement wird ein Federelement mit sehr großer Steifigkeit simuliert. Für das Starrelement gilt zunächst wieder, daß die Elementsteifigkeitsmatrix aus 4 (6x6)-Untermatrizen aufgebaut wird. Die Belegung der Matrixeinzelwerte erfolgt mit Hilfe eines sehr großen Steifigkeitswertes  $W$ . Vor der Bereitstellung der Starrelemente werden die Hauptdiagonalwerte der Elementsteifigkeitsmatrizen aller elastischen Elemente (Balken, Federn, Dreiecke und Vierecke) auf ihren Maximalwert durchgemustert. Dieser maximale Steifigkeitswert wird mit 10 000 multipliziert und liefert dadurch den Wert  $W$ . Damit entsteht:

$$\underline{C}_{ii} = \begin{pmatrix} \underline{V}_x & \underline{V}_y & \underline{V}_z & \underline{f}_x & \underline{f}_y & \underline{f}_z \\ W & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}lW \\ 0 & 0 & W & 0 & -\frac{1}{2}lW & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}lW & 0 & W + \frac{1}{3}l^2W & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}lW & 0 & 0 & 0 & W + \frac{1}{3}l^2W \end{pmatrix} \quad (91)$$

$\underline{C}_{ij}$  und  $\underline{C}_{jj}$  : Belegung analog zu  $\underline{C}_{ii}$ , Vorzeichenregelung wie beim Balken, aber:

$$C_{ij} (5, 5) = C_{ij} (6, 6) = -W + \frac{1}{6} l^2 W \quad (92)$$

### 3.4. Dünnwandiges Dreieckelement

Bei diesem Element wird eine Scheibe mit ebenem Spannungszustand und eine Kirchhoff-Platte /29/ überlagert. Beide Spannungszustände beeinflussen sich gegenseitig nicht ("Faltwerk-Element").

Für beide Spannungszustände werden kleine Verformungen und eine geringe Elementdicke (etwa 1/10 der kleinsten Seitenlänge) vorausgesetzt.

Das Programm verarbeitet auch große Elementdicken ohne Kommentar. Der Anwender muß jedoch beachten, daß dann die zugrunde gelegten linearen Theorien nicht mehr erfüllt sind (z. B. Ebenbleiben der Querschnitte bei der Platten-Durchbiegung, oder Spannungskomponente  $\sigma_z = 0$  senkrecht zur Elementebene bei der Scheibe).

Das Programm testet lediglich ab, ob die Seitenlängen eines Dreieckes mehr als 10fache Unterschiede aufweisen. In diesem Fall wird die Berechnung abgebrochen, weil sonst numerische Probleme beim Lösen des Gleichungssystems auftreten.

### 3.4.1. Elementsteifigkeitsmatrix

Im Programm werden für die Scheibe und für die Platte verschiedene Elementsteifigkeitsmatrizen  $\underline{C}_e^S$ ,  $\underline{C}_e^P$  getrennt aufgebaut und anschließend zur Faltwerk-Elementsteifigkeitsmatrix  $\underline{C}_e$  zusammengesetzt.

Bild 21 zeigt, daß je Knoten jeweils 3 Freiheitsgrade entstehen, die sich gerade zu den 6 in GITRA3 verwendeten Freiheitsgraden ergänzen:

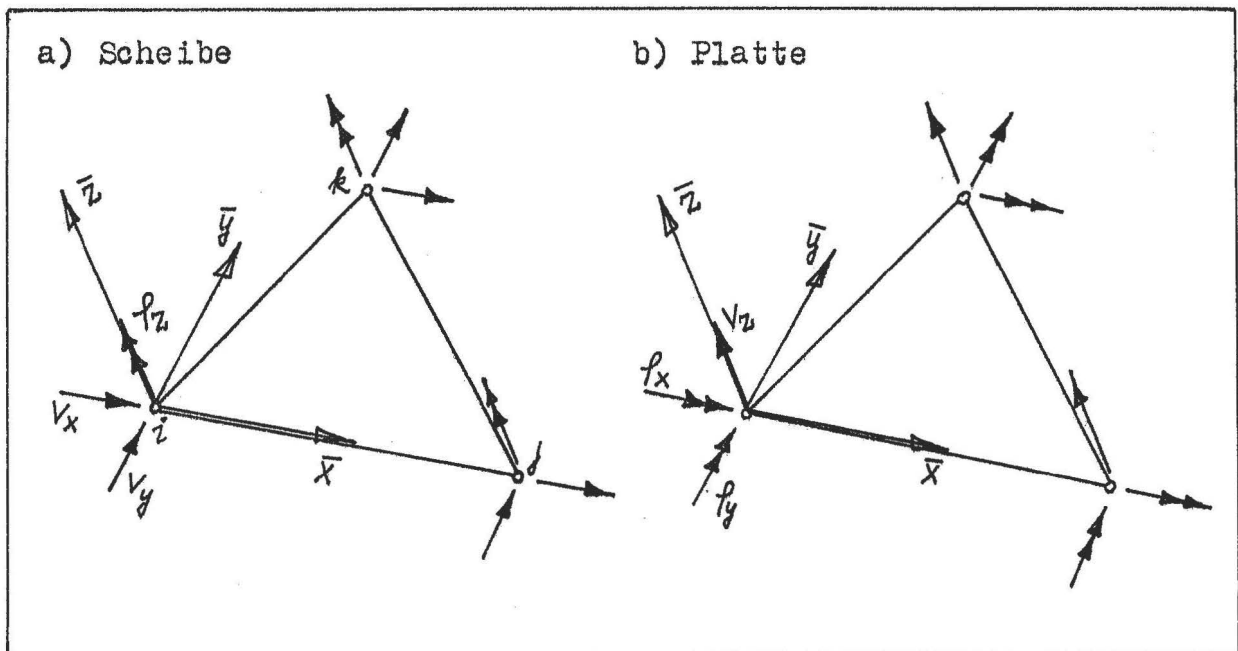


Bild 21: Überlagerung der Scheibe (mit ebenem Spannungszustand) und der Kirchhoff-Platte mit je 3 Freiheitsgraden pro Knoten

Die Scheibe liefert je Knoten zwei Verschiebungen  $v_x$ ,  $v_y$  und eine Verdrehung  $\phi_z$ , die Platte eine Verschiebung  $v_z$  und zwei Verdrehungen  $\phi_x$ ,  $\phi_y$ .

Die (18x18)-Matrix  $\underline{C}_e$  des Faltwerk-Elementes besteht aus 9 Untermatrizen  $C_{ij}$  für die 3 Knoten i, j und k:

$$\underline{C}_e = \begin{pmatrix} \underline{C}_{ii} & \underline{C}_{ij} & \underline{C}_{ik} \\ & \underline{C}_{jj} & \underline{C}_{jk} \\ \text{symm.} & & \underline{C}_{kk} \end{pmatrix} \quad (93)$$

Jede der sechs zu berechnenden (6x6)-Untermatrizen wird im Programm aus zwei (3x3)-Untermatrizen zusammengesetzt, Bild 22.

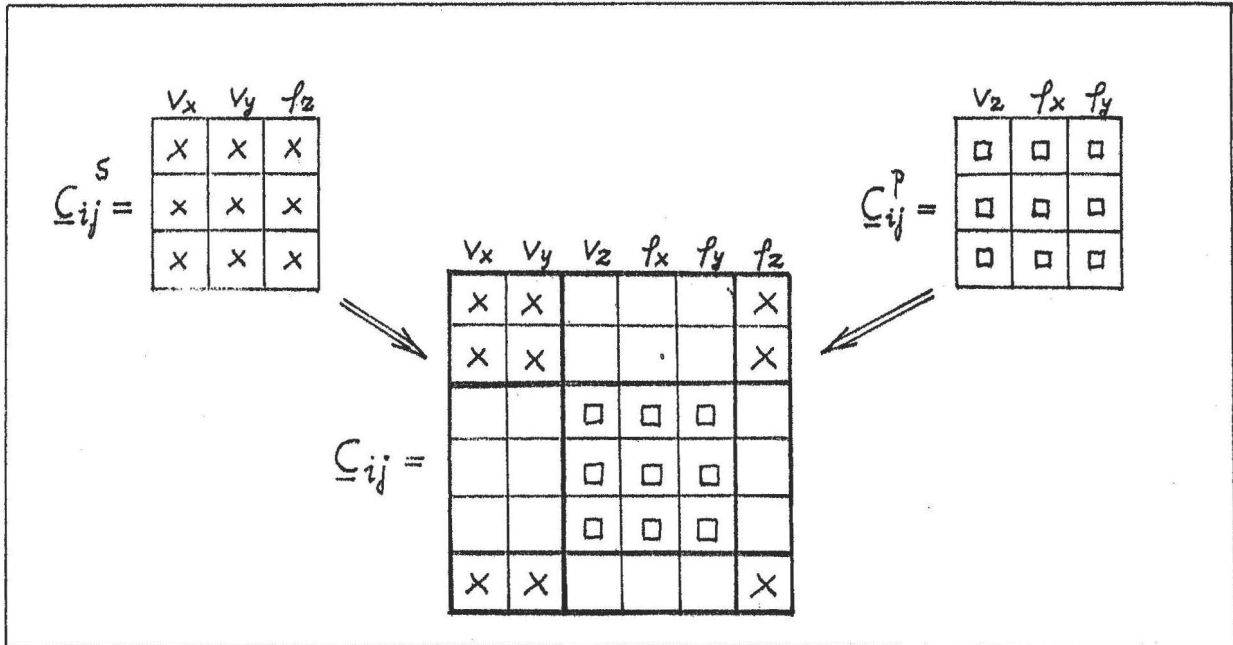


Bild 22: Zusammenbau der Untermatrizen  $\underline{C}_{ij}^S$  (Scheibe) und  $\underline{C}_{ij}^P$  (Platte) zur Untermatrix  $\underline{C}_{ij}$  des Faltwerk-Elementes

### 3.4.1.1. Elementsteifigkeitsmatrix $\underline{C}_e^S$ für die Scheibe

Hier entsteht eine (9x9)-Matrix:

$$\underline{C}_e^S = \begin{pmatrix} \underline{C}_{ii}^S & \underline{C}_{ij}^S & \underline{C}_{ik}^S \\ & \underline{C}_{jj}^S & \underline{C}_{jk}^S \\ \text{symm.} & & \underline{C}_{kk}^S \end{pmatrix} \quad (94)$$

$\underline{C}_e^S$  wird auf der Basis eines unvollständigen quadratischen Verschiebungsansatzes nach Allmann /32/ und unter Verwendung der Matrizen  $\underline{D}$  und  $\underline{H}$  des Abschnittes 2.3.1. berechnet. Der Allmann-Ansatz kann mit seinen 9 Freiwerten zwischen dem linearen und dem vollständigen quadratischen Verschiebungsansatz der Abschnitte 2.3.1. und 2.3.2. eingeordnet werden.

Anstelle von Seitenmittenknoten-Verschiebungen werden Knoten-Verdrehungen gemäß Bild 21a realisiert.

### 3.4.1.2. Elementsteifigkeitsmatrix $\underline{C}_e^P$ der Platte

Analog zur Scheibe entsteht eine (9x9)-Matrix:

$$\underline{C}_e^P = \begin{pmatrix} \underline{C}_{ii}^P & \underline{C}_{ij}^P & \underline{C}_{ik}^P \\ & \underline{C}_{jj}^P & \underline{C}_{jk}^P \\ \text{symm.} & & \underline{C}_{kk}^P \end{pmatrix} \quad (95)$$

Für die Platte wird ein unvollständiger kubischer Verschiebungsansatz nach Bazeley u. a. /33/ zur Berechnung der Matrix  $\underline{C}_e^P$  verwendet. Dieser Ansatz gehört zu den nichtkonformen Ansätzen, weil damit die Neigungsstetigkeit an den Elementrändern nicht erfüllt wird. Trotzdem wird für diesen relativ einfachen Verschiebungsansatz in der Literatur /34/ auf gute Erfahrungen verwiesen.

### 3.4.2. Elementmassenmatrix

Zur Berechnung der Matrix  $\underline{M}_e$  wird in GITRA3 nur Translations-trägheit auf der Basis eines linearen Verschiebungsansatzes /34/ berücksichtigt.

Die Elementmassenmatrix lautet:

$$\underline{M}_e = \frac{1}{24} \rho A h \cdot \begin{pmatrix} \underline{M}_{ii} & \underline{M}_{ij} & \underline{M}_{ik} \\ & \underline{M}_{jj} & \underline{M}_{jk} \\ \text{symm.} & & \underline{M}_{kk} \end{pmatrix} \quad (96)$$

mit A : Fläche des Dreieckelementes, h : Dicke und :

$$\underline{M}_{ii} = \underline{M}_{jj} = \underline{M}_{kk} = \begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z & \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (97)$$

$$\underline{M}_{ij} = \underline{M}_{ik} = \underline{M}_{jk} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (98)$$

### 3.5. Dünnwandiges Viereckelement

Auch hier handelt es sich um ein' Faltwerk-Element, d. h. Scheibe und Platte sind entkoppelt.

Für das Viereckelement wird kein spezieller Verschiebungsansatz verwendet, sondern es wird im Programm aus vier über Kreuz angeordneten Dreiecken mit jeweils halber Dicke zusammengesetzt, Bild 23.

Damit wird auch beim Viereck eine Scheibe mit ebenem Spannungszustand und eine Kirchhoff-Platte überlagert.



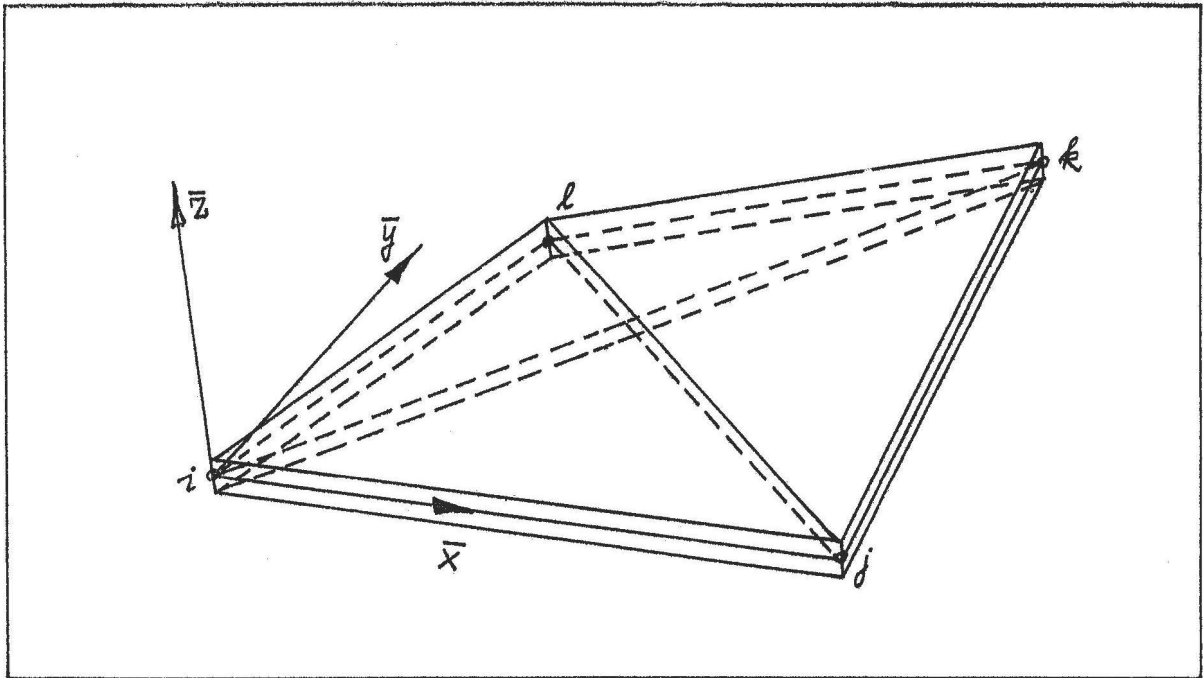


Bild 23: Interner Aufbau des Viereckelementes

Die Elementsteifigkeitsmatrix enthält 16 Untermatrizen  $\underline{C}_{ij}$  für die 4 Knoten i, j, k und l:

$$\underline{C}_e = \begin{pmatrix} \underline{C}_{ii} & \underline{C}_{ij} & \underline{C}_{ik} & \underline{C}_{il} \\ & \underline{C}_{jj} & \underline{C}_{jk} & \underline{C}_{jl} \\ & \text{symm.} & \underline{C}_{kk} & \underline{C}_{kl} \\ & & & \underline{C}_{ll} \end{pmatrix} \quad (99)$$

Die 10 zu berechnenden (6x6)-Untermatrizen des Viereckes werden aus den 24 zu berechnenden (6x6)-Untermatrizen der vier Dreiecke ermittelt, wobei zusätzlich Transformationen in das Elementkoordinatensystem des Viereckes erforderlich sind, wenn das jeweilige Dreieck ein anderes EKS besitzt als das Viereck.

Die (24x24)-Elementmassenmatrix  $\underline{M}_e$  wird auf die gleiche Weise wie  $\underline{C}_e$  bereitgestellt.

### 3.6. Diskretes Masselement

Mit diesem Element können starre Aufbauten für dynamische Berechnungen rationell modelliert werden. Im Zusammenhang mit Feder-, Dämpfer- und Starrelementen kann damit die in der Dynamik übliche Mehrkörpersystem-Modellierung (MKS) realisiert werden.

Beim diskreten Masselement sind vom Anwender die Masse im Schwerpunkt des starren Aufbaues und die Massenträgheitsmomente um die Hauptachsen anzugeben. Der so idealisierte Knoten ist zweckmäßig mit Hilfe von masselosen Starrelementen mit der elastischen Struktur zu verbinden.

Im beliebig wählbaren lokalen Koordinatensystem LKS ist auch das Nullsetzen von "Massenkomponenten" möglich. Damit wird die Bewegung geführter Massen modellierbar.

Das Masselement wirkt nur bei Schwingungsberechnung, weil dafür lediglich eine Elementmassenmatrix existiert:

$$\underline{M}_e = \underline{M}_{ii} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_x & v_y & v_z & \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ \hline m_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_z \end{array} \end{array} \quad (100)$$

mit  $m_x, m_y, m_z$  : Massenwirkung in  $x^*, y^*, z^*$ -Richtungen,  
 $J_x, J_y, J_z$  : Massenträgheitsmomente um die  $x^*, y^*, z^*$ -Achsen.

Durch die Vorgabe von Massenträgheitsmomenten bezüglich der Hauptachsen sind auch für die Drehfreiheitsgrade nur die Hauptdiagonalwerte der Matrix  $\underline{M}_e$  belegt.

#### 4. Hinweise zu einigen Algorithmen in GITRA3

##### 4.1. Schnittkräfte und -momente im Modul GITSK

Die Schnittreaktionen können wahlweise im Struktur- oder Elementkoordinatensystem berechnet werden. Für das EKS gilt je Element entsprechend Gl. (39):

$$\underline{\tilde{f}}_e = \underline{\tilde{C}}_e \underline{\tilde{u}}_e \quad (101)$$

mit  $\underline{\tilde{f}}_e = (\underline{\tilde{f}}_1, \underline{\tilde{f}}_j, \dots, \underline{\tilde{f}}_m)^T$  Elementkraftvektor, der m Knotenkraftvektoren  $\underline{\tilde{f}}_1, \underline{\tilde{f}}_j$  usw. für m Knoten des finiten Elementes enthält.

Jeder Knotenkraftvektor repräsentiert komplett die Schnittreaktionen des jeweiligen Knotens im EKS, z. B. gilt für den Knoten i :

$$\underline{\tilde{f}}_i = (F_{x_i}^{\wedge}, F_{y_i}^{\wedge}, F_{z_i}^{\wedge}, M_{x_i}^{\wedge}, M_{y_i}^{\wedge}, M_{z_i}^{\wedge})^T \quad (102)$$

mit  $F_{x_i}^{\wedge}, F_{y_i}^{\wedge}, F_{z_i}^{\wedge}$  Schnittkräfte im EKS  
 $M_{x_i}^{\wedge}, M_{y_i}^{\wedge}, M_{z_i}^{\wedge}$  Schnittmomente im EKS

Für Schnittreaktionen im SKS gilt entsprechend Gl. (18):

$$\underline{f}_e = \underline{C}_e \underline{u}_e \quad (103)$$

mit  $\underline{f}_e = (\underline{f}_1, \underline{f}_j, \dots, \underline{f}_m)^T$  für m Knoten. Zum Beispiel entsteht für den Knoten i :

$$\underline{f}_i = (F_{x_i}, F_{y_i}, F_{z_i}, M_{x_i}, M_{y_i}, M_{z_i})^T \quad (104)$$

mit  $F_{x_i}, F_{y_i}, F_{z_i}$  Schnittkräfte im SKS  
 $M_{x_i}, M_{y_i}, M_{z_i}$  Schnittmomente im SKS

Um  $\underline{\tilde{f}}_e$  oder  $\underline{f}_e$  berechnen zu können, wird noch einmal im Modul GITSK die Element-Transformationsmatrix  $\underline{T}_e$  und die Elementsteifigkeitsmatrix  $\underline{\tilde{C}}_e$  (im EKS) für das gewählte Element auf-

gebaut. Dazu werden wieder die Angaben im Quelldatenfile name. - Q - genutzt. Anschließend erfolgt das Einlesen der diskreten Verformungsergebnisse  $\underline{u}_e$  des Elementes vom Ergebnisfile name. - E - . Diese Element-Ergebnisse im SKS werden gemäß Gl. (37) ins EKS transformiert:

$$\tilde{\underline{u}}_e = \underline{T}_e \underline{u}_e \quad (105)$$

Damit ist  $\tilde{\underline{f}}_e$  nach Gl. (101) berechenbar.

Um  $\underline{f}_e$  im SKS nach Gl. (103) zu ermitteln, muß lediglich noch die Matrix  $\underline{C}_e$  aus  $\tilde{\underline{C}}_e$  und  $\underline{T}_e$  über Gl. (42) bereitgestellt werden.

#### 4.2. Spannungen der Flächenelemente im Modul GITSP

Es werden sowohl bei der Scheibe als auch bei der Platte nur Spannungen  $\tilde{\sigma}_x$ ,  $\tilde{\sigma}_y$  und  $\tilde{\tau}_{xy}$  bezüglich der x-y-Elementebene berechnet, Bild 24. Spannungen  $\tilde{\sigma}_z$ ,  $\tilde{\tau}_{zx}$  und  $\tilde{\tau}_{zy}$  werden nicht erfaßt, auch wenn vom Anwender für das Element eine große Dicke vorgegeben wurde, siehe Abschnitt 3.4. Im Unterschied zur Scheibe werden bei der Platte die Spannungswerte auf der Ober- oder Unterseite bereitgestellt. Die Spannungskomponenten  $\tilde{\sigma}_x$ ,  $\tilde{\sigma}_y$ ,  $\tilde{\tau}_{xy}$  je Knoten infolge Scheiben- und Plattenzustand werden jeweils addiert und abschließend über Gl. (58) zur Vergleichsspannung  $\tilde{\sigma}_v$  nach der Gestaltänderungsenergiehypothese zusammengefaßt.

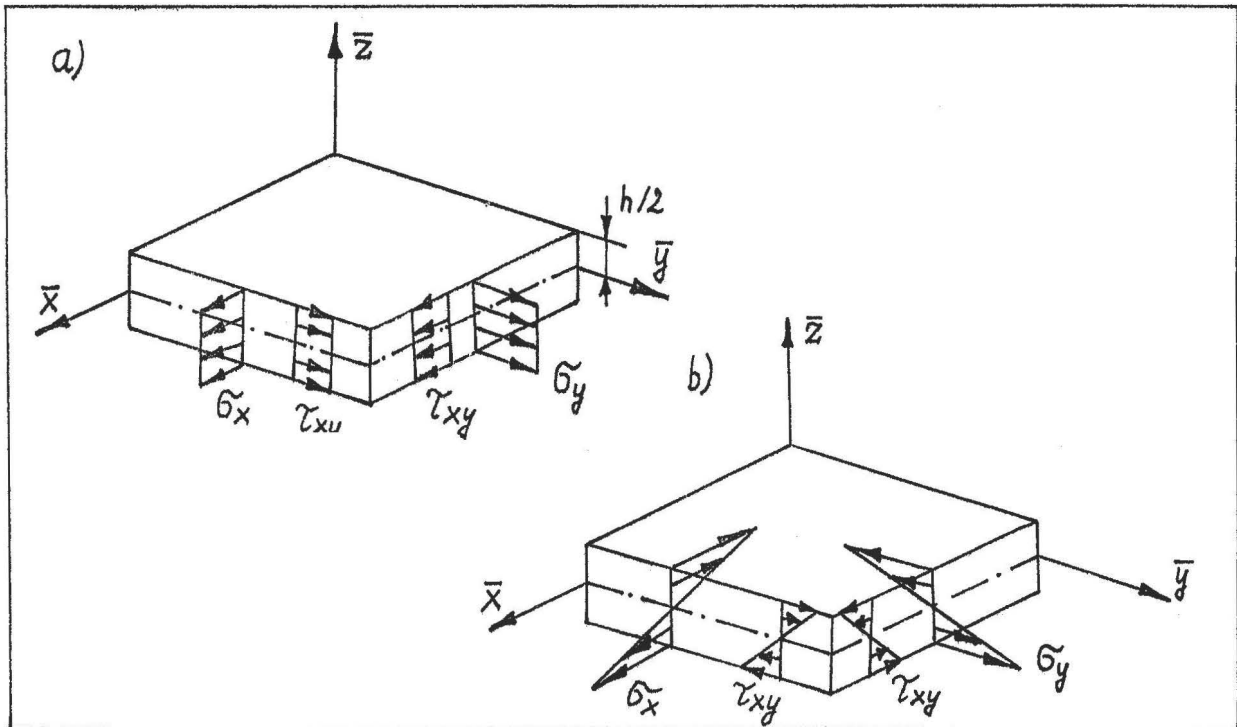


Bild 24: Die mit GITRA3 berechneten Spannungen in Flächenelementen der Dicke  $h$  : a) Scheibe b) Platte

#### 4.3. Modale Reduktion im Modul GITFG

Um den Aufwand bei der Analyse erzwungener Schwingungen einer FEM-Struktur drastisch zu senken, erfolgt in GITFG vor der Frequenzgang-Berechnung eine modale Reduktion, d. h. eine Umrechnung der Knotenfreiheitsgrade auf wenige "Schwingform"-Freiheitsgrade. Dieses Vorgehen ist dann möglich, wenn das Schwingungsverhalten der Struktur im wesentlichen durch die unteren Eigenschwingformen repräsentiert wird.

Das Verfahren der modalen Reduktion liefert für ungedämpfte Schwingungen ohne besonderen Aufwand ein wesentlich kleineres Differentialgleichungssystem als vorher, das außerdem noch entkoppelt ist. Bei Anwendung der modalen Reduktion auf schwingende Strukturen mit allgemeiner Dämpfung entsteht ein wesentlich kleineres Differentialgleichungssystem als vorher, das jetzt aber komplex und gekoppelt ist. Beide Typen werden in GITFG verarbeitet.

Die Wirkungsweise der modalen Reduktion wird nachfolgend nur für ungedämpfte Schwingungen detailliert beschrieben.

Voraussetzung für jede modale Reduktion ist eine schon vorhandene Eigenwertlösung für  $p$  Eigenwerte, wobei  $p \ll n$  sein kann. Die berechneten zugehörigen Eigenvektoren  $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \dots \underline{x}_p$  werden zunächst als Spalten einer (reduzierten) Modalmatrix  $\underline{X}_p$  angeordnet:

$$\underline{X}_p = (\underline{x}_1 \quad \underline{x}_2 \quad \dots \quad \underline{x}_p) \quad (106)$$

Diese Matrix enthält  $n$  Zeilen für die  $n$  Freiheitsgrade der gesamten Struktur und nur  $p$  Spalten für die  $p$  berechneten Eigenschwingformen. (Eine vollständige Modalmatrix  $\underline{X}_n$  kann für große Strukturen ohnehin nicht bereitgestellt werden).

Die Rechteck-Matrix  $\underline{X}_p$  wird dann als Transformationsmatrix für eine Koordinatentransformation benutzt:

$$\begin{aligned} \underline{u}(t) &= \underline{X}_p \cdot \underline{q}(t) \\ \ddot{\underline{u}}(t) &= \underline{X}_p \cdot \ddot{\underline{q}}(t) \end{aligned} \quad (107)$$

Die Knotenverschiebungen  $\underline{u}$  werden damit auf sogenannte "Hauptkoordinaten"  $\underline{q}$  transformiert, wobei  $\underline{q}$  nur noch  $p$  Einzelwerte enthält.

Durch Einsetzen von (107) in das große Differentialgleichungssystem (70) für erzwungene konservative Schwingung entsteht

$$\underline{M} \underline{X}_p \ddot{\underline{q}}(t) + \underline{C} \underline{X}_p \dot{\underline{q}}(t) = \underline{f}(t) \quad (108)$$

und durch Linksmultiplikation mit  $\underline{X}_p^T$  (analog zur Koordinatentransformation im Abschnitt 2.4.4.):

$$\underbrace{\underline{X}_p^T \underline{M} \underline{X}_p}_{\underline{M}_p^*} \ddot{\underline{q}}(t) + \underbrace{\underline{X}_p^T \underline{C} \underline{X}_p}_{\underline{C}_p^*} \dot{\underline{q}}(t) = \underbrace{\underline{X}_p^T \underline{f}(t)}_{\underline{f}_p^*} \quad (109)$$

Die (willkürlich mögliche) Normierung der Eigenvektoren in  $\underline{X}_p$  sei:

$$\underline{X}_p^T \underline{M} \underline{X}_p = \underline{E}_p \quad (110)$$

mit  $\underline{E}_p$  Einheitsmatrix der Dimension  $(p \times p)$

Weiterhin soll gelten:

$$\underline{X}_p^T \underline{C} \underline{X}_p = \underline{\Lambda}_p \quad (111)$$

mit  $\underline{\Lambda}_p$  ( $p \times p$ ) diagonale Spektralmatrix:

$$\underline{\Lambda}_p = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \emptyset \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & \lambda_p \end{pmatrix} = \text{diag}(\omega_k^2) \quad (112)$$

Mit den Orthogonalisierungsbeziehungen (110) und (111) folgt aus (109) ein relativ kleines entkoppeltes Differentialgleichungssystem:

$$\ddot{\underline{q}}(t) + \underline{\Lambda}_p \underline{q}(t) = \underline{f}_p^*(t) \quad (113)$$

Der besondere Vorteil der modalen Reduktion besteht hier darin, daß nur der Kraftvektor tatsächlich transformiert werden muß:

$$\underline{f}_p^*(t) = \underline{X}_p^T \underline{f}(t) \quad (114)$$

Mit den großen Matrizen  $\underline{C}$  und  $\underline{M}$  sind keine Operationen erforderlich.

Durch Gl. (113) "zerfällt" das große Schwingungssystem faktisch in  $p$  ungekoppelte fiktive Einmassenschwinger, deren Schwingungsverhalten einzeln analysiert werden kann. Durch anschließende einfache Multiplikation der Ergebnisse mit der Modalmatrix  $\underline{X}_p$  gemäß (107) erfolgt die Rücktransformation auf die Knotenfreiheitsgrade. Damit kann das Schwingungsverhalten für jeden beliebigen Knotenfreiheitsgrad rekonstruiert werden.

Literaturverzeichnis

- /1/ WOLF, C. D., KEIL, A.: GITRA - ein grafisches interaktives Programmsystem zur Tragsystemkonstruktion. Maschinenbautechnik 26 (1977) 9, S. 423 - 426.
- /2/ KEIL, A., ROCKHAUSEN, L., VOGEL, M., WOLF, C. D.: Schwingungen von Maschinengestellen. Tagung Festkörpermechanik zur Dynamik und Getriebetechnik. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1979, Band A, Beitrag XII.
- /3/ BURKHARDT, R., ERFURT, F., GUMPERT, W., TIETZ, W.: Übersicht zu Arbeiten auf dem Gebiet der Gestellschwingungen. Tagung Festkörpermechanik zur Dynamik und Getriebetechnik. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1985, Band A, Beitrag XXII.
- /4/ JOENSSON, D.: Statische und dynamische Tragwerksanalyse mit GITRA3. Vortrag zur 5. Fachtagung "Antriebstechnik und Maschinendynamik" 1988 in Karl-Marx-Stadt. Veröff. in: Maschinenbautechnik 37 (1988) 10, S. 477 - 479.
- /5/ FILONENKO - BORODITSCH, M. M.: Elastizitätstheorie. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1967.
- /6/ ALTENBACH, J., SACHAROV, A. S. u. a.: Die Methode der finiten Elemente in der Festkörpermechanik. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1982.
- /7/ RITZ, W.: Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. J. Reine und Angew. Math. 135 (1909), S. 1 - 61.
- /8/ ZURMÜHL, R.: Ein Matrizenverfahren zur Behandlung von Biege-Schwingungen nach der Deformationsmethode. Ing. Archiv 32 (1963), S. 201 - 213.
- /9/ FALK, S.: Das Verfahren von Rayleigh-Ritz mit hermiteschen Interpolationspolynomen. ZAMM 43 (1963), S. 149 - 166.
- /10/ IRONS, B. M.: A frontal solution program for finite element analysis. Int. Journ. for Num. Meth. in Eng. (1970), S. 5 - 32.
- /11/ ZURMÜHL, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. 5. Aufl., Springer-Verlag 1965.
- /12/ DANKERT, J.: Numerische Methoden der Mechanik. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1977.
- /13/ CUTHILL, E., McKEE, J.: Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices. Proc. ACM National Conference, Association for Computing Machinery, New York 1969, S. 157 - 172.
- /14/ GEORGE, J. A.: Computer implementation of the finite element method. Tech. Rep. STAN-CS-71-208, Computer Sci. Dept., Stanford Univ., Stanford, Calif. 1971 (zitiert in /15/ und /16/).



- /15/ WAI-HUNG LIU, SHERMAN, A. H.: Comparative analysis of the Cuthill-McKee and the reverse Cuthill-McKee ordering algorithms for sparse matrices. SIAM J. Num. Anal. 13 (1976) No. 2, S. 198 - 213.
- /16/ GIBBS, N. E., POOLE, W. G., STOCKMEYER, P. K.: An algorithm for reducing the bandwidth and profile of a sparse matrix. SIAM J. Num. Anal. 13 (1976) No. 2, S. 236 - 250.
- /17/ MEYER, A., DÖHLER, B., MEINEL, G., PESTER, M.: Dokumentation zum Programmpaket "Großdimensionierte Eigenwertprobleme". Wiss. Information TH Karl-Marx-Stadt 1982, Heft 32.
- /18/ LANDGRAF, G., OSCHATZ, A.: Fehlerabschätzung für FEM-Programme. In: Flächentragwerke IV. TU Dresden, Weiterbildungszentrum Festkörpermechanik, Konstruktion und rationeller Werkstoffeinsatz, Heft 2 (1985), S. 105 - 111.
- /19/ GABBERT, U.: Die Finite-Element-Methode in den Ingenieurwissenschaften unter dem Aspekt der rechen-technischen Realisierung im Rahmen universeller Programmsysteme. Diss. B, TU Magdeburg 1988.
- /20/ SCHNACK, E.: Beitrag zur Berechnung rotationssymmetrischer Spannungskonzentrationsprobleme mit der Methode der finiten Elemente. Diss. TU München 1973.
- /21/ JOHANSSON, D.: Anwendung finiter Elemente auf die Berechnung von Kerbspannungen. Maschinenbautechnik 31 (1982) 10, S. 464 - 467.
- /22/ MAESS, G.: Vorlesungen über numerische Mathematik. Band I: Lineare Algebra. Akademie-Verlag Berlin 1984.
- /23/ MCGORMICK, S. F., NOE, T.: Simultaneous iteration for the matrix eigenvalue problem. Lin. Alg. Appl. 16 (1977), S. 43 - 46.
- /24/ MEYER, A., DÖHLER, B., SKURT, L.: Algorithmen für großdimensionierte Eigenwertprobleme. Wiss. Schriftenreihe der TH Karl-Marx-Stadt (1983), Heft 8.
- /25/ ZEHN, M.: Konzeption der Systemvariante COSAR-Eigen-schwingungen. Tagung Festkörpermechanik zu Festigkeitsproblemen und Materialverhalten. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1982, Band A, Beitrag VII.
- /26/ PRZEMIENIECKI, J. S.: Theory of Matrix Structural Analysis. McGraw-Hill Book Company, New York 1968.
- /27/ AURICH, H.: Schwingungstechnik. Lehrbrief 2: Schwingungen fester Kontinua. VEB Verlag Technik, Berlin 1973.
- /28/ Autorenkollektiv: Taschenbuch Maschinenbau. Band 1: Grundlagen. VEB Verlag Technik Berlin, 2. Auflage, 1965.
- /29/ GÖLDNER, H., HOLZWEISSIG, F.: Leitfaden der Technischen Mechanik. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 5. Auflage, 1976.
- /30/ ARCHER, J. S.: Consistent mass matrix for distributed mass systems. J. Struct. Div. Proc. ASCE 89 (1963),

S. 161 - 178.

- /31/ ARCHER, J. S.: Consistent matrix formulation for structural analysis using finite-element techniques. J. Am. Inst. Aeron. Astron. 3 (1965), S. 1910 - 1918.
- /32/ ALLMANN, D. J.: A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis. Computers and Structures 19 (1984), S. 1 - 8.
- /33/ BAZELEY, G. P., CHEUNG, Y. K., IRONS, B. M., ZIENKIEWICZ, O. C.: Triangular elements in bending-conforming and non-conforming solutions. Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio (1965), zitiert in /34/.
- /34/ ZIENKIEWICZ, O. C.: Methode der finiten Elemente. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1987.

ANLAGE
--------

Auszüge aus der aktuellen Anwendungsbeschreibung

Die vollständige Anwendungsbeschreibung wird jedem Nutzer als Textdatei auf Diskette übergeben. Weiterhin erhält jeder Nutzer einen Satz fotokopierter Bilder.

TU Karl-Marx-Stadt

Sektion Maschinen-Bauelemente

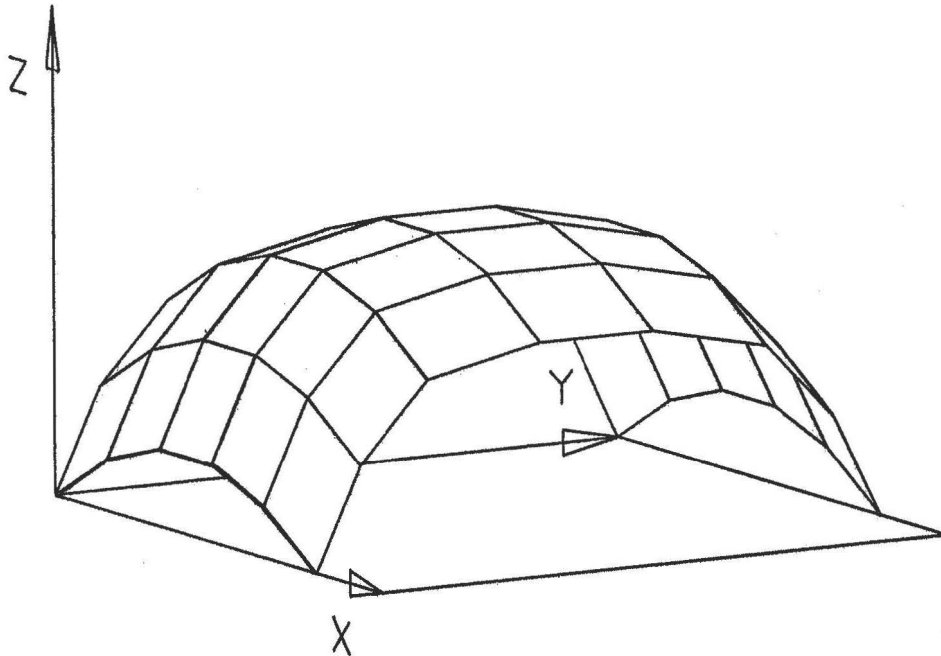
Lehrstuhl Strukturdynamik ( Prof.Dr.sc.techn. F.Erfurt )

F E M - Programmsystem

G I T R A 3

Grafisch interaktive Tragwerksanalyse  
( Version 3 : Personalcomputer )

Anwendungsbeschreibung (GITAB3.doc) 25.01.1989



Bearbeiter :

Dr.sc.techn. D.Joensson  
Dipl.-Ing. J.Liebers  
Dr.-Ing. A.Eobe  
Dr.-Ing. W.Tietz  
Dipl-Ing B. Findeisen  
Doz.Dr.sc.techn. W.Gumpert  
Dipl.-Ing. C.Streller

Inhaltsverzeichnis

1. Geräatetechnische Voraussetzungen
2. Gegenwaertiger Entwicklungsstand
  - 2.1. Uebersicht
  - 2.2. Lieferumfang Januar 1989
  - 2.3. Arbeitsweise des Programmsystems
3. Modellaufbereitung
  - 3.1. Einleitung
  - 3.2. Drei kartesische Koordinatensysteme
  - 3.3. Elementkatalog GITRA3
  - 3.4. Lagerung
  - 3.5. Statische Belastung
  - 3.6. Ablauf der Modellaufbereitung
4. Einzelheiten zum Quelldatenfile
  - 4.1. Bezeichnungen und Abkuerzungen im Quelldatenfile
  - 4.2. Beispiel
5. Hinweise zu einzelnen GITRA-Modulen
  - 5.1. Berechnungsmodul GITBM
  - 5.2. Grafikmodul GITGR
  - 5.3. Schnittkraftmodul GITSK
  - 5.4. Spannungen fuer Flaechenelemente GITSP
6. Quellenangaben zu einigen Algorithmen
7. Literaturverzeichnis
8. Anlage : Aktueller Lieferumfang

Die Anwendungsbeschreibung (Datei GITAB3.doc) enthaelt 25 Seiten Text (mit Deckblatt) und 3 Seiten Anlagen.

## 1. Geraetetechnische Voraussetzungen

---

\* 16 bit-Rechner, 640 KByte RAM, Festplatte, Betriebssystem MS-DOS

\* Grafik-Farbterminal

\* Plotter

Die Programme sind in FORTRAN77 geschrieben. Die Grafik erfolgt mit Zugriff auf elementare Routinen der Bibliothek ARTIBAS.lib.

## 2. Gegenwaertiger Entwicklungsstand

---

### 2.1. Uebersicht

---

GITRA3 berechnet statische Verformungen und Eigenschwingformen fuer raeumliche, duennwandige Flaechen-tragwerke in Kombination mit Balken beliebiger Querschnitte, Federn, Masse- und Starrelementen.

Die finiten Elemente sind ueber Knotenpunkte mit je 6 Freiheitsgraden ( 3 Verschiebungen und 3 Verdrehungen ) verbunden.

Die Berechnung der Knoten-Freiheitsgrade erfolgt fuer kleine Verformungen und linearelastisches, isotropes Materialverhalten.

Fuer die Eingabe-Kontrolle und Darstellung der verformten Struktur steht ein Grafik-Modul zur Verfuegung.

Wahlweise koennen Schnittkraefte und -momente, sowie Spannungen fuer Flaechenelemente ermittelt werden.

Fuer die Elemente und Knoten werden als Bezeichnung Namen verwendet. Die Zuordnung zu entsprechenden Zahlen wird intern vom Programm so realisiert, dass automatisch eine optimale Rechenzeit entsteht.

Es koennen Strukturen mit maximal 2000 Knoten fuer einen statischen Lastfall berechnet werden.

## 2.2. Lieferumfang Januar 1989 (Aktueller Stand siehe Anlage)

---

Beliefert wird nur die **N u t z e r v e r s i o n** von GITRA 3. Die Nutzerversion besteht aus Grund- und Zusatzmodulen.

Zu jedem Modul werden an den Nutzer entweder eine EXE-Datei oder mehrere OBJ-Dateien uebergeben.

Darueber hinaus gibt es zu GITRA 3 eine **E n t w i c k l e r - v e r s i o n**, die zur Zeit Module zur Empfindlichkeitsanalyse, Formoptimierung und Substrukturtechnik enthaelt. Wenn diese Module einen bestimmten Stand erreicht haben, werden sie als Zusatzmodule in die Entwicklerversion uebernommen.

Die **G r u n d m o d u l e** der Nutzerversion sind ( Bild 1a):

G I T D E	Dialog-Eingabe ( Erzeugung eines Quelldatenfiles)
G I T E D	Eingabe-Druck (kommentierter Druck des Quelldatenfiles)
G I T B M	Berechnungs-Modul Statik und Eigenwerte
G I T G R	Grafik
G I T A D	Ausgabe-Druck (der Verformungs-Ergebnisse)
G I T S K	Schnittkraefte und -momente
G I T S P	Spannungen fuer Flaechenelemente

Als **Z u s a t z m o d u l e** stehen zur Verfuegung ( Bild 1b):

G I T F D	Adapter vom FEM-Datenstandard (TGL 44640) zu GITRA3
G I T 3 2	Adapter von GITRA3-Eingabe zu GITRA II (ESER)
G I T F G	Frequenzgang fuer gedaempfte erzwungene Schwingungen
G I T Z I	Numerische Zeit-Integration fuer transiente Schwingungserregung
G I T Q B	Querschnittskennwerte fuer Balken

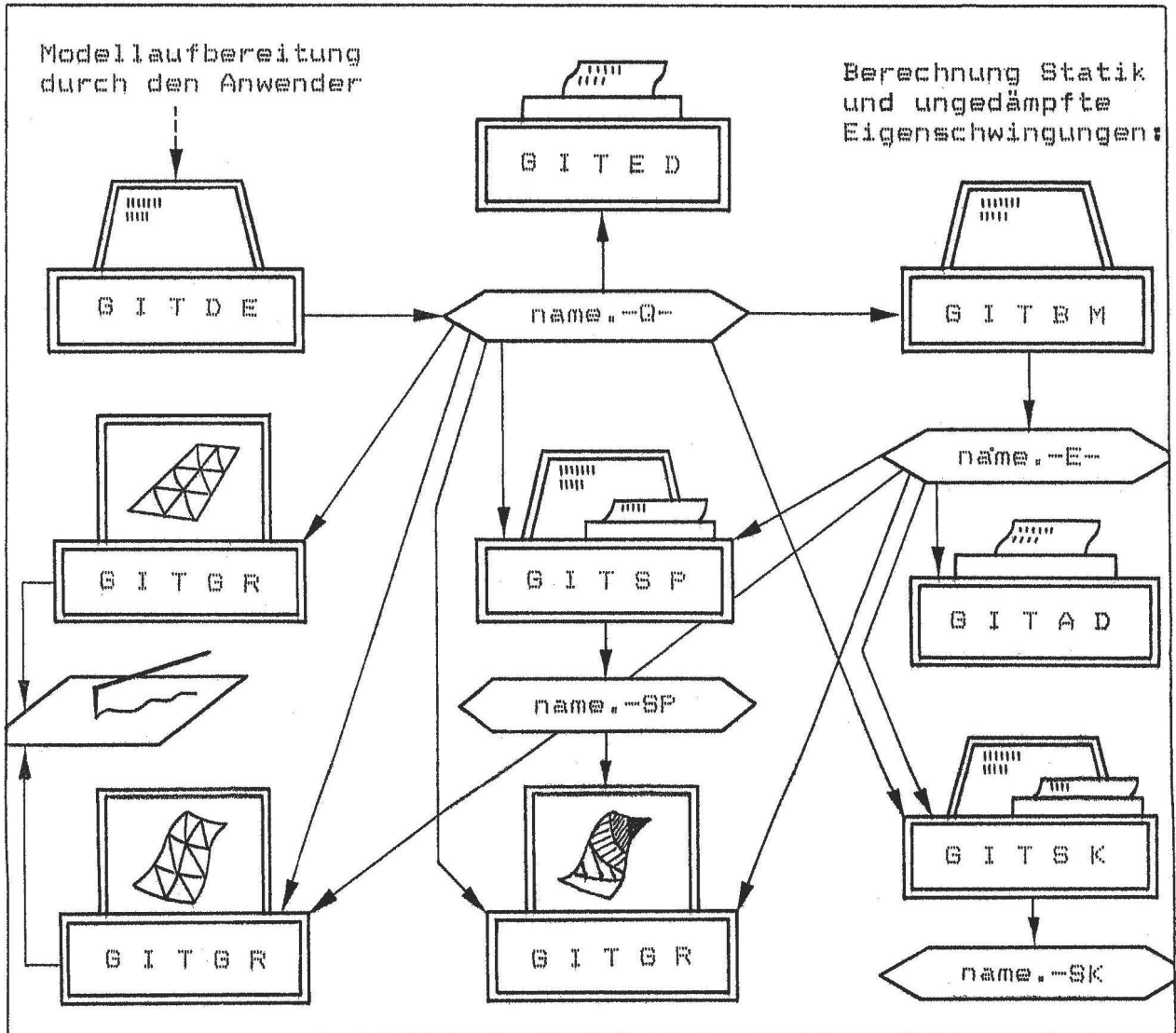


Bild 1a: Grundmodule der Nutzerversion von GITRA 3

### 2.3. Arbeitsweise des Programmsystems ( Grundmodule)

Infolge der Dialog-Eingabe mit GITDE zu einem Beispiel " NAME " wird ein

Quelldatenfile name.-Q-

erzeugt. Diese formatierte, sequentielle Datei enthaelt saemtliche Eingabedaten fuer das Beispiel.

Nach der Berechnung mit GITBM entsteht im aktuellen Verzeichnis ein

Ergebnisfile name.-E-



als unformatierte Direktzugriffs-Datei. Sie enthaelt fuer jeden statischen Lastfall und jede berechnete Eigenschwingform je Knotenpunkt 3 Verschiebungen und 3 Verdrehungen bezueglich des Strukturkoordinatensystems, sowie die Eigenfrequenzen.

Beide Files werden auf der Festplatte zur Langzeitspeicherung abgelegt und dienen als Eingabe fuer andere Module, siehe Bild 1a.

Nach Berechnung der Schnittreaktionen wird eine sequentielle, formatierte Datei

name.-SK

erzeugt. Diese Datei kann vom Nutzer mit eigenen Programmen weiterverarbeitet werden, z.B. fuer Spannungsberechnungen bei Balken.

Die Anwendung des Moduls GITSP fuehrt zu einer Datei

name.-SP

Diese unformatierte Direktzugriffsdatei dient als Eingabe fuer den Grafik-Modul, um Spannungsverteilungen der Flaechenelemente farbig darzustellen.

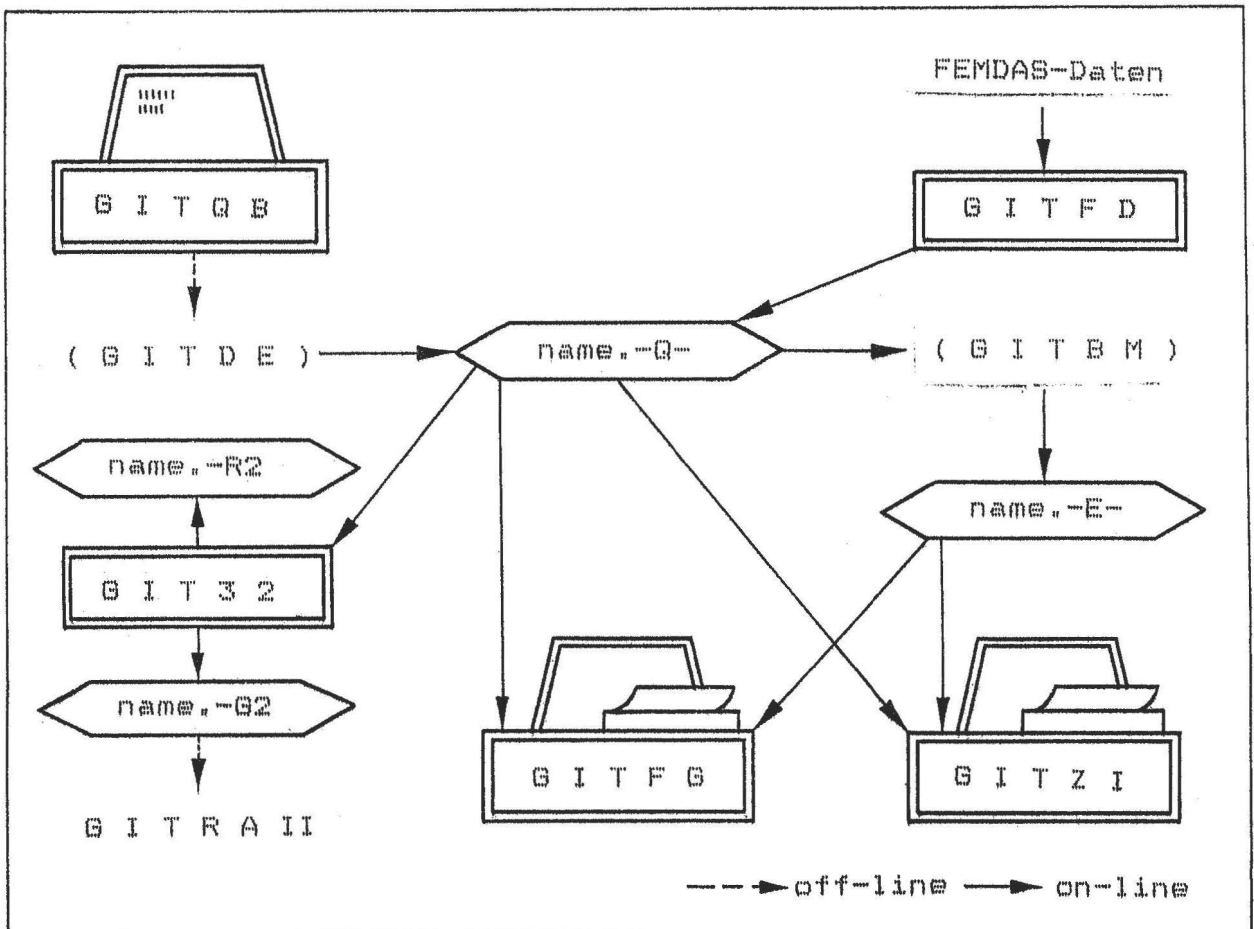


Bild 1b: Verfuegbare Zusatzmodule der Nutzerversion von GITRA 3

### 3. Modellaufbereitung

---

#### 3.1. Einleitung

---

Voraussetzung fuer die Berechnung ist die Modellierung des realen Bauteiles als FEM-Modell. Zum kompletten Berechnungsmodell gehoeren neben der geometrischen Nachbildung des Bauteiles mit Hilfe der zur Verfuegung stehenden Elementtypen auch die Idealisierung der auf das Bauteil einwirkenden auesseren Belastungen und die Idealisierung der Lagerung.

Die kinematischen Randbedingungen der Struktur sind an den Knoten anzugeben, d.h. die Bewegung in einzelnen oder saemtlichen sechs Freiheitsgraden bestimmter Knoten wird zu Null gesetzt.

Die Knoten sind auch jene Stellen der Struktur, an denen auessere Belastungen in Form von Kraefften und/oder Momenten angreifen koennen. An Kraftangriffsstellen sind deshalb Knoten festzulegen bzw. es sind die wirkenden Belastungen unter Beachtung des statischen Gleichgewichtes auf die Knoten umzurechnen.

Massenanhaeufungen bzw. als starr zu betrachtende Anbauten der Struktur koennen als diskrete Zusatzmassen oder Zusatzmassen- traegheitsmomente an einzelnen Knoten beruecksichtigt werden.

Fuer die Modellierung sind drei Koordinatensysteme von Bedeutung:

#### 3.2. Drei kartesische Koordinatensysteme (Rechtssysteme)

---

##### a) Das SKS : Strukturkoordinatensystem $x y z$

---

Die Lage der Elemente wird im raumfesten SKS beschrieben, d.h. die Koordinaten aller Knoten sind in einem  $x y z$  - Koordinatensystem anzugeben. Das SKS wird vom Nutzer festgelegt.

##### b) Das EKS : Elementkoordinatensystem $x^{\wedge} y^{\wedge} z^{\wedge}$

---

Fuer jedes Element wird durch die Knotenkoordinaten weitestgehend automatisch ein EKS definiert. Der Ursprung des EKS liegt immer im zuerst angegebenen Knoten des Elementes und die  $x^{\wedge}$ -Achse zeigt in Richtung des zweiten Knotens.

Im EKS werden die Elementdaten (Querschnittswerte und Festigkeitskenngrößen) eingegeben und die Schnittkräfte und -momente ausgegeben.

Für Dreiecke und Vierecke ist das EKS durch die Knotenkoordinaten vollständig beschrieben.

Für Balken und Federn wird jedoch vom Nutzer eine zusätzliche Angabe zur Lage der  $\hat{y}$ -Achse benötigt: Der Winkel ALPHA als

Drehung des EKS um die  $\hat{x}$ -Achse, d.h. um die Längsachse des Elementes, siehe Bild 2.

Der Winkel ALPHA ist Null, wenn die  $\hat{y}$ -Achse parallel zur  $x$ - $y$ -Ebene liegt und die  $\hat{z}$ -Achse eine positive  $z$ -Komponente besitzt.

ALPHA ist größer (kleiner) Null, wenn eine Links- (Rechts-) Schrauben-Drehung um die  $\hat{x}$ -Achse zur Erfüllung der Bedingung für ALPHA=0 erforderlich ist.

Ein Sonderfall entsteht für eine zur  $z$ -Achse parallel liegende  $\hat{x}$ -Achse. Hier ist ALPHA gleich Null, wenn auch  $\hat{y}$  und  $x$  parallel sind und außerdem die gleiche Richtung haben. ALPHA ist wieder größer (kleiner) Null, wenn eine Links- (Rechts-) Schrauben-Drehung um die  $\hat{x}$ -Achse erforderlich ist, um die Sonderfall-Bedingung für ALPHA=0 zu erfüllen.

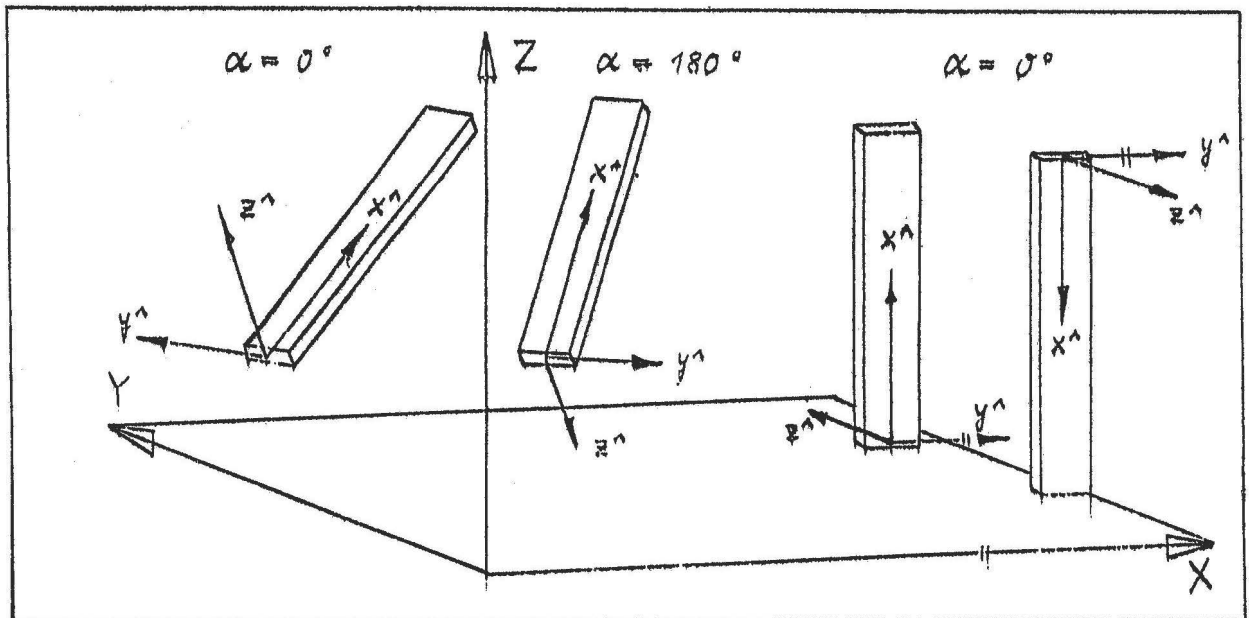


Bild 2 : Beispiele für den Winkel ALPHA

c) Das LKS : Lokales Koordinatensystem  $x^*y^*z^*$

Fuer jeden Knoten kann vom Nutzer ein LKS mit Hilfe von drei Winkeln PHI, PSI und CHI bezueglich des SKS definiert werden. Das LKS dient vorrangig zur Beschreibung beliebig angeordneter Lagerungen der Struktur bzw. spezieller Richtungen diskreter Zusatzmassen oder Zusatzmassentraegheitsmomente.

Der am haeufigsten vorkommende Fall einer Parallelverschiebung zwischen SKS und LKS bedeutet  $\text{PHI}=\text{PSI}=\text{CHI}=0$ .

Bei einer Transformation des  $x\ y\ z$ -Koordinatensystems in das  $x^*y^*z^*$ -System wird zuerst das  $x\ y\ z$ -System um die  $x$ -Achse mit dem Winkel PHI gedreht und damit ein neues Koordinatensystem  $x'y'z'$  erzeugt (Bild 3a). Durch Drehung des

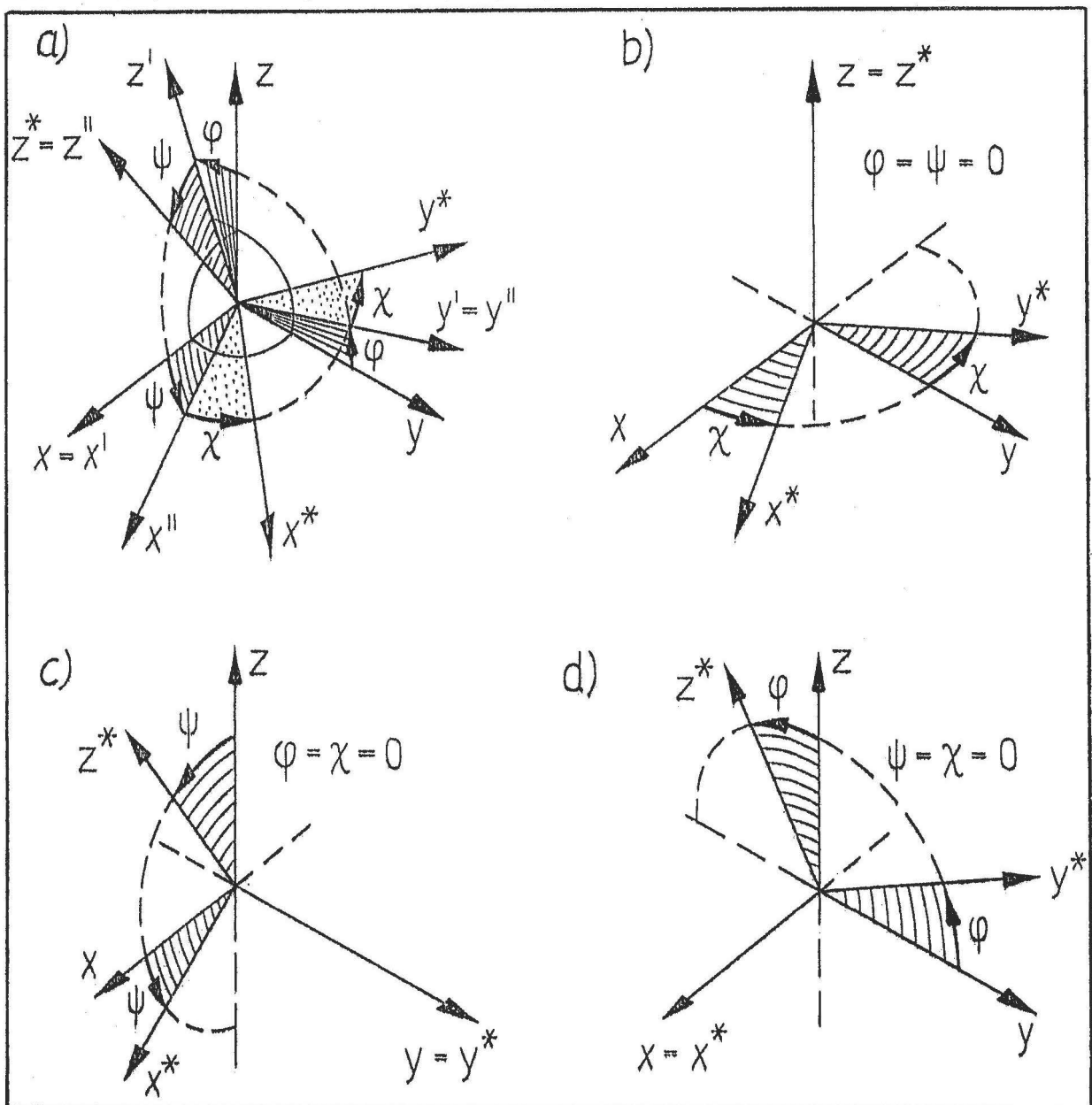


Bild 3 : Beispiele zur Lage des LKS : a) allgemeine Drehung, b) nur Drehung um  $z$  , c) nur um  $y$  , d) nur um  $x$

Strich-Systeme mit dem Winkel  $\Psi$  um die  $y'$ -Achse entsteht dann ein  $x''y''z''$ -System. Nach Drehung um die  $z''$ -Achse mit dem Winkel  $\Phi$  folgt schliesslich das  $x^*y^*z^*$ -System.

Fuer ein vorgegebenes LKS koennen die drei Winkel rationell ermittelt werden, indem zunaechst die  $z^*$ -Achse senkrecht in die  $y-z$ -Ebene projiziert wird. Die so projizierte Achse  $z_p$  und die  $z^*$ -Achse schliessen den Winkel  $\Psi$  ein. Der Winkel  $\Phi$  liegt zwischen der  $z$ -Achse und der  $z_p$ -Achse. Der Winkel  $\Theta$  ist in einer Ebene zu messen, die eine allgemeine raeumliche Lage im SKS besitzt.  $\Theta$  wird von der  $y^*$ -Achse ueberstrichen, wenn das  $x^*y^*z^*$ -System um die  $z^*$ -Achse so gedreht wird, dass die  $y^*$ -Achse in die  $y-z$ -Ebene zu liegen kommt.

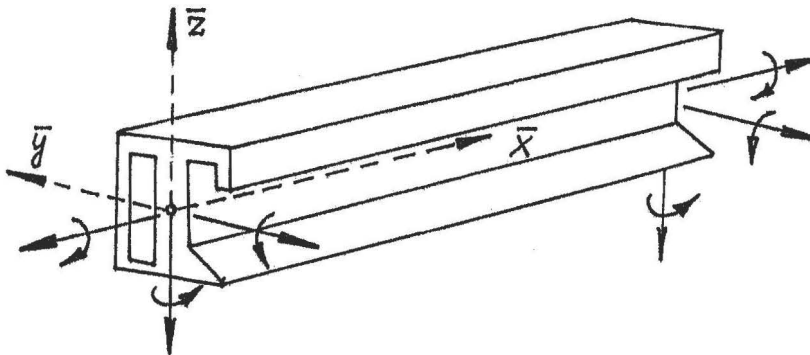
### 3.3. Elementkatalog zu G I T R A 3

---

Balkenelement ( 12 Freiheitsgrade )

---

Timoshenko-Balken

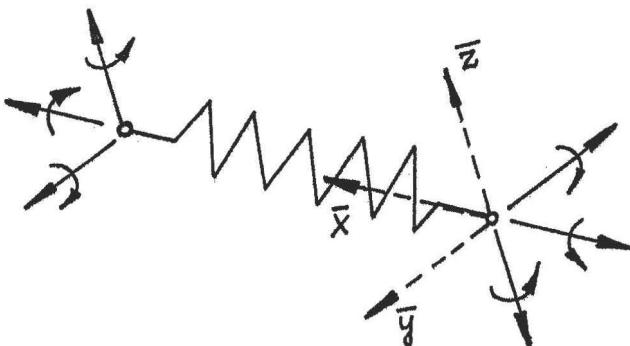


- Biegung
- Querkraftschub
- Torsion
- Rotationstraegheit bei Schwingungen

Federelement ( 12 Freiheitsgrade )

---

masselos



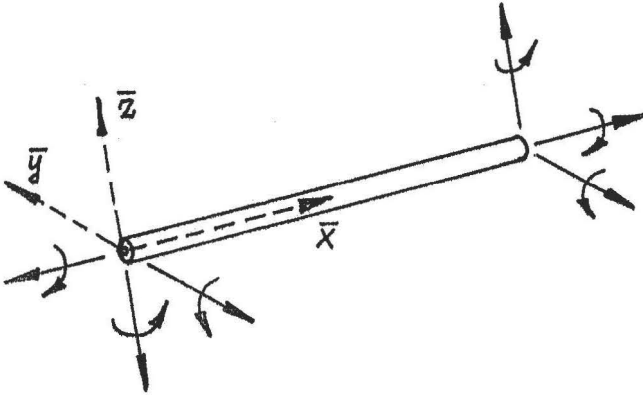
- Zug-Druck-Federn in drei Richtungen
- Drehfedern um drei Achsen

Starrelement ( 12 Freiheitsgrade )

masselos

E-Modul unendlich

zur Modellierung des  
Kraftflusses bei nicht  
zusammenstossenden  
Element-Achsen  
benachbarter Bauteile)

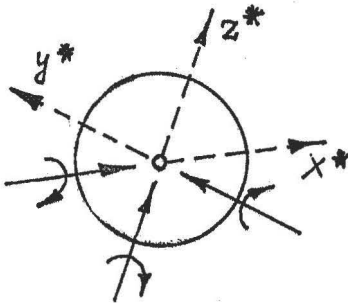


Masseelement ( 6 Freiheitsgrade )

- diskrete Zusatzmasse in drei  
Richtungen

- diskrete Zusatz-Trägheits-  
momente um drei Achsen

im lokalen Koordinatensystem

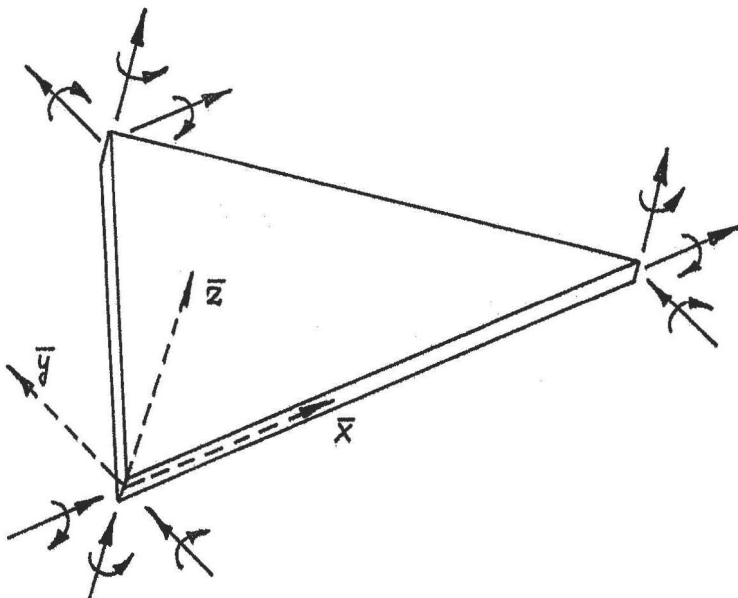


Dreieckelement ( 18 Freiheitsgrade )

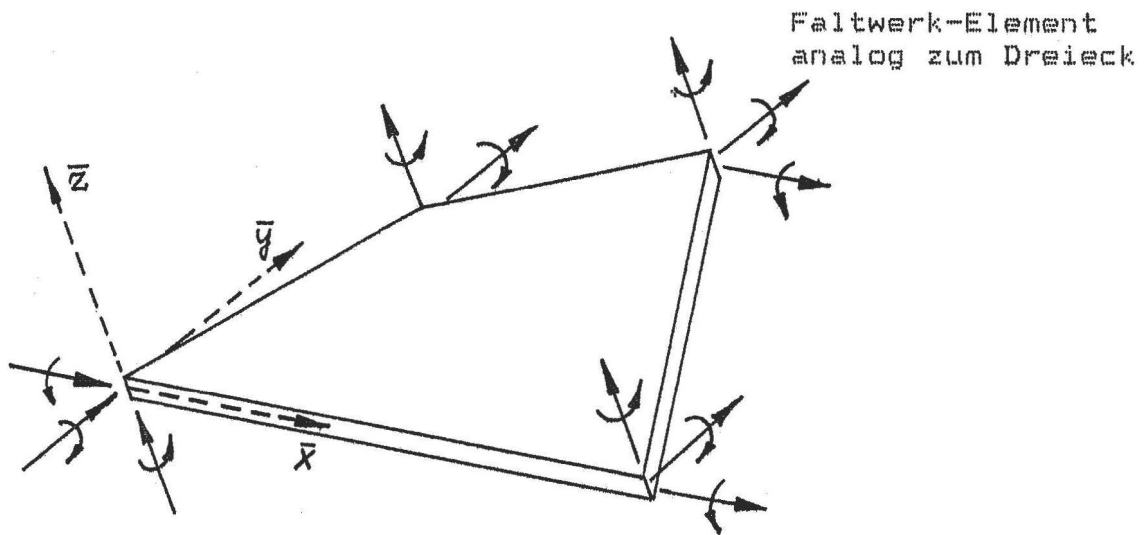
Faltwerk-Element

( Superposition von  
Scheibe und Platte )

- dünnwandig und eben



Viereckelement ( 24 Freiheitsgrade )



3.4. Lagerung ( bezueglich LKS)

Achtung !

Die modellierte Lagerung darf keine Starrkoerperver-  
schiebung oder -verdrehung der Struktur zulassen.

Die Berechnung kann sonst nicht ausgefuehrt werden !

a) Festlager

Alle 6 Freiheitsgrade des gewaehlten Knotens sind verhindert.

b) Teilverschiebliches Lager

Im gewaehlten Knotenpunkt wird ein LKS ueber die 3 Winkel  $\Phi$ ,  $\Psi$  und  $\chi$  festgelegt (siehe Abschnitt 3.2). Jeder einzelne der 6 Freiheitsgrade bezueglich dieses LKS kann als verhindert angegeben werden.

### 3.5. Statische Belastung (bezuglich SKS)

---

Je Knotenpunkt koennen maximal 3 Einzelkraefte und 3 Einzelmomente bezueglich des SKS angegeben werden.

Anders gerichtete Kraefte und Momente sind vom Nutzer in die SKS-Komponenten  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  und  $M_z$  zu zerlegen.

Flaechenlasten sind vor der Eingabe in diskrete Knotenkraefte umzurechnen.

Fuer eine Struktur koennen mehrere berechnet werden.

### 3.6. Ablauf der Modellaufbereitung

---

1. Festlegen des Strukturkoordinatensystems
2. Anhand der vorliegenden Zeichnungsunterlagen moeglichst gute geometrische Nachbildung des Bauteiles mit Hilfe der zur Verfuegung stehenden Elementtypen (Abschnitt 3.3).
3. Vergabe der Knoten- und Elementnamen
4. Ermittlung der Knotenkoordinaten im SKS
5. Aufstellen der Koinzidenzmatrix (Topologie), d.h. Zuordnung der Knotennamen zu den Elementnamen
6. Idealisierung der Lagerungen : Festlager, teilverschiebliche Lager, evtl. elastische Lager (mit Hilfe von Federelementen)
7. Evtl. Ergaenzung der Struktur durch diskrete Zusatzmassen und Zusatzmassentraegheitsmomente
8. Festlegen der Elementdaten (Querschnittswerte und Festigkeitskenngraessen) fuer jedes Element
9. Materialdaten (Werkstoffkenngraessen) fuer jedes Element
10. Vorgabe einer Berechnungsstrategie (Welche statischen Lastfaelle sind zu untersuchen, wieviel Eigenfrequenzen sollen ermittelt werden ?)
11. Idealisierung der Belastung fuer jeden statischen Lastfall
12. Kontrolle der Vollstaendigkeit aller Eingabedaten mit Hilfe der Quelldatenfile-Beschreibung (Abschnitt 4)
13. Anwendung des Dialog-Eingabemoduls GITDE.  
Ergebnis : Quelldatenfile name.-Q- im aktuellen Verzeichnis.

Nach Eingabe der Knotenkoordinaten und der Topologie kann bereits mit dem Grafik-Modul GITGR das geometrische Modell auf dem Farbbildschirm sichtbar gemacht werden.



⋮

## 5. Hinweise zu einzelnen Modulen

---

### 5.1. Berechnungsmodul GITBM

---

Nach dem Start des Moduls GITBM wird zunaechst abgefragt, ob Steuergroessen geaendert werden sollen. Zu diesen Groessen gehoert auch die Abbruchgrenze EPS fuer die Eigenert-Iteration sowie die Anzahl ITS der Iterationsschritte bis zur naechsten Abfrage. Standardwerte sind EPS = 0.5 Prozent und ITS = 15.

Waehrend der Verarbeitung des Quelldatenfiles werden vom Programm temporaere Direktzugriffs-Dateien fuer die Koordinaten, fuer Topologie usw. angelegt, um bei der nachfolgenden Berechnung einen schnelleren Zugriff zu ermoeeglichen.

Nach der automatischen Bandbreiten- und Profilminimierung wird vom Programm die Groesse der temporaeren Datei fuer die Struktursteifigkeitsmatrix angegeben.

Fuer Strukturen bis etwa 100 Knoten wird die Berechnung komplett im Arbeitsspeicher des Rechners durchgefuehrt. Fuer groessere Strukturen schaltet das Programm automatisch in den Modus "externe Mathematik" um, d.h. die Struktursteifigkeitsmatrix wird waehrend der Loesung des Gleichungssystems partiell vom externen Speicher geholt und wieder ausgelagert.

Trotzdem sind nicht beliebig grosse<sup>o</sup> Strukturen berechenbar. In Abhaengigkeit von Anzahl der Knoten, der Bandbreite, der gewuenschten Anzahl der statischen Lastfaelle und Eigenschwingformen sind folgende Ungleichungen zur Einhaltung der Speicherplatzkapazitaeten zu erfuellen :

Statik :

---

$$\text{GRENZE} > 337 * \text{NBB} + 2 * \text{NK} + 2 * \text{NZ} + 8 * \text{NZ} * \text{NLS} + 360$$


---

(Der Wert GRENZE ist im Master-Programm des Moduls GITBM3 standardmaessig mit 160 000 vereinbart und kann bei Speicherplatzproblemen vom Nutzer veraendert werden).

Eigenwertberechnung :

---

$$\text{GRENZE} > 337 * \text{NBB} + \text{NK} + 36 * \text{NZ} + ( 8 * \text{NZ} + 4 * \text{NSF} + 20 ) * \text{NSF} + 360$$


---

mit NBB Bandbreite (max. auftretende Knotenpunktdifferenz der Struktur)

NK Anzahl der Knoten

NZ Anzahl der Freiheitsgrade  $NZ = 6 \cdot (NK - NKLF)$   
mit NKLF Anzahl der Festlagerknoten

NLS Anzahl der statischen Lastfaelle

NSF Anzahl der Eigenschwingformen

Daraus folgt z.B. fuer einen statischen Lastfall, dass eine Struktur mit 2000 Knoten nur dann verarbeitet werden kann, wenn die maximal auftretende Knotenpunktdifferenz den Wert  $NBB = 224$  nicht ueberschreitet [  $NLS=1, NKLF=0, GRENZE=160000$  ].

Mit der gleichen Knotenpunktdifferenz kann jedoch nur eine Struktur mit 468 Knoten verarbeitet werden, wenn nur eine Schwingform berechnet werden soll [  $NBB=224, NKLF=0, NSF=1$  ].

Fuer Berechnungen mit  $MAR=3$  (Statik und Dynamik) sind beide Ungleichungen zu erfuehlen.  
Das Programm GITBM testet beide Bedingungen selbstaendig ab. Als Bandbreite wird die nach der automatischen Profilminimierung berechnete Bandbreite verwendet.  
Der externe Speicherplatzbedarf auf der Festplatte wird im wesentlichen durch die Grosse der Struktursteifigkeitsmatrix bestimmt. Die Struktursteifigkeitsmatrix benoetigt

$$( NK - NKLF + NPROF ) * 288 \text{ Byte}$$

als Speicherplatz. NPROF ist das Profil der Struktursteifigkeitsmatrix.

Die Iteration bei der Eigenwertberechnung wird beendet, wenn saemtliche Eigenwerte aller gewuenschten Eigenschwingformen weniger als

$$EPS = 0.5 \text{ Prozent}$$

von den Eigenwerten des vorangegangenen Iterationsschrittes abweichen. (Die Eigenwerte sind die Quadrate der Eigenkreisfrequenzen).

Ausgegeben werden die Eigenfrequenzen  $f$  in Hz.

Jede Schwingform wird normiert ausgegeben. Die Normierung erfolgt so, dass die jeweils groesste Amplitude aller Verschiebungswerte der Schwingform den Wert 1 hat. Bei den Verdrehungen koennen dadurch auch Werte grosser 1 entstehen.

Bei Fehlerangaben im Berechnungsmodul wird die externe Knotennummer verwendet, z.B. 17 bedeutet 17. Knotenname im Quelldatenfile.

## 5.2. Grafikmodul G I T G R

---

### 5.2.1. Menüfunktionen

---

R bedeutet : Rechtsschrauben-Drehung der Struktur um die z-Achse, L : Links-Drehung um z, U : Rechts-Drehung um x, O : Links-Drehung um x, jeweils um 10 Grad.

D bedeutet : 20 Grad Rechts-Drehung um z und 70 Grad Links-Drehung um x.

Die Zentralprojektion (Z) gilt fuer einen 4-fachen Abstand des Betrachters vom mittleren Durchmesser des Objektes. Standardmaessig wird die Struktur in Parallelprojektion (P) gezeigt.

Verformung (V) : Die statische Verformung wird im allgemeinen mit 250-facher Vergrößerung der Knotenverschiebungen praesentiert.

Wenn das Maximum dieser vergrösserten Verschiebungen groesser als 10% oder kleiner als 3% der maximalen Strukturausdehnung ist, wird der Vergrößerungsfaktor so veraendert, dass die groesste Verschiebung genau 10% der maximalen Strukturausdehnung entspricht.

Die berechneten Eigenschwingformen werden immer so normiert, dass die groesste Verschiebung 10% der maximalen Strukturausdehnung betraegt.

Bei Darstellung der Belastung (B) werden je Lastfall die Einzelkraefte und Einzelmomente so normiert, dass die Pfeillaenge der groessten Kraft und des groessten Momentes jeweils 15% der max. Strukturausdehnung entspricht.

Fuer die farbige Darstellung der Spannungsverteilungen von Flaechenelementen (.) wird zusaetzlich eine Datei name.-SP vorausgesetzt. Diese Datei muss fuer das Beispiel zuvor mit dem Modul GITSP erzeugt werden.

## 5.3. Schnittkraft-Modul G I T S K

---

Fuer die gesamte Struktur werden zunaechst interne Dateien zu Zwischenrechnungen wie im Berechnungsmodul GITBM angelegt. Danach erfolgt fuer die gewuenschten Elemente eine erneute Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen.

Die Schnittkraefte und -momente gelten fuer das jeweilige Elementkoordinatensystem. Sie koennen aber auch wahlweise auf das Strukturkoordinatensystem bezogen ausgegeben werden.

Balkenelemente enthalten Zug-Laengskraefte, wenn der 1.Wert  
 in der  $F_x^{\wedge}$ -Spalte negativ ist und Druck-Laengskraefte,  
 wenn der 1.Wert positiv ist.

Am Ende der Berechnung entsteht auf der Platte eine forma-  
 tierte, sequentielle Datei

name.\_SK

Diese Datei kann vom Nutzer mit einem Editor gelesen oder  
 mit einem eigenen Programm weiterverarbeitet werden, um  
 z.B. Spannungen in Balken mit speziellen Querschnittsprofilen  
 zu ermitteln.

#### 5.4 Spannungen fuer Flaechenelemente G I T S P

BITSP liefert Spannungen an den Knoten von Flaechenelementen.

Zunaechst werden fuer jeden Flaechenelement-Knoten die  
 Vergleichsspannungen von allen angrenzenden Flaechenelementen  
 gemittelt und anschliessend der Groesse nach geordnet  
 ausgegeben. Damit erhaelt der Nutzer mit wenigen Daten einen  
 guten Ueberblick zur Maximalbeanspruchung der Struktur.

Weiterhin koennen die Spannungsspruenge der angrenzenden  
 Elemente je Knoten ,ebenfalls der Groesse nach geordnet,  
 angezeigt werden. Es handelt sich dabei um relative Werte,  
 die auf die groeseste in der Struktur vorkommende gemittelte  
 Knoten-Vergleichsspannung bezogen sind.

Mit BITSP erfolgt fuer den jeweiligen statischen Lastfall  
 immer fuer alle Knoten die Berechnung der Knoten-Spannungen  
 und relativen Spannungsspruenge. Der Nutzer kann jedoch  
 waehlen; wieviel Werte ausgegeben werden: z.B. 12,5  
 bedeutet Ausgabe von 12 Knoten-Spannungen und 5 Spannungs-  
 spruengen.

Am Ende der Berechnung enteteht auf der Platte eine unforma-  
 tierte Direktzugriffsdatei

name.\_SP

Diese Datei wird vom Grafik-Modul BITGR angefordert, wenn  
 fuer das Beispiel name die Spannungsverteilung gezeigt  
 werden soll.

⋮