

# Lineare Lösungsverfahren der Betriebsfestigkeit

Dieter Joensson

*Die Leistungsfähigkeit linearer Verfahren wird an verschiedenen Beispielen demonstriert: Zur Beschreibung der Wöhlerlinie, des Mittelspannungseinflusses, der Schadensakkumulation sowie stochastischer Beanspruchungsprozesse.*

*Weiterhin erfolgt eine geometrische Interpretation der Palmgren/Miner-Formel, und es wird auf den Zusammenhang zwischen linearer Schadensakkumulation und Mittelwertbeschreibung für stochastische Beanspruchungen hingewiesen.*

Wöhlerlinie, Mittelspannungseinfluß, Schadensakkumulation, Mittelwertbildung, stochastische Prozesse

кривая Велера, влияние среднего напряжения, суммирование повреждений, усреднение, стохастический процесс

Wöhler's curve, middle stress influence, accumulation of damage, computation of means, stochastic processes

raie de Wöhler, tensien moyenne, dommage accumulation, Valeur moyenne, irrégulier processus

## 1. Einleitung

In der Betriebsfestigkeit wird die Lebensdauer für stochastisch beanspruchte Bauteile ermittelt. Dabei erfolgt die Lebensdauerberechnung vorrangig auf der Basis einer Schadensakkumulationshypothese mit den beiden Eingangsgrößen Wöhlerlinie und stochastische Beanspruchungs-Zeit-Funktion.

Speziell für die Beschreibung der Schadensakkumulation besteht jedoch die Schwierigkeit, daß die Schädigung im Bauteil nicht eindeutig nur einer physikalischen Größe zugeordnet werden kann. Bereits bei einstufiger (sinusförmiger) Schwingbeanspruchung gibt es drei typische Ermüdungsphasen:

Phase I: Bildung der Ermüdungsgrundstruktur

Phase II: Mikrorißentstehung und Ausbildung von Makrorissen

Phase III: Makrorißausbreitung bis zum Bruch.

Zu Beginn der Phase I sind meßbare werkstoffphysikalische Veränderungen feststellbar, die degressiv zunehmen. Parallel dazu entwickeln sich feinste Mikrorisse, die sich vor allem in der Phase II zu größeren Rissen vereinigen und schließlich Makrorisse bilden, die in der Phase III progressiv bis zum Bruch wachsen. Dieser Schädigungsprozeß kann vereinfacht in Form einer nichtlinearen Schädigung  $D$  in Abhängigkeit von den Lastwechseln  $n$  dargestellt werden, Bild 1.

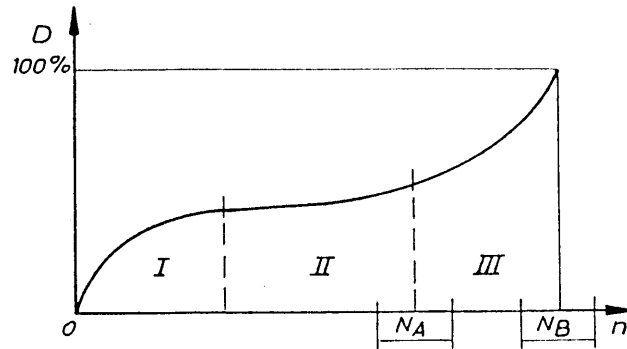


Bild 1: Schematische Darstellung des Schädigungsverlaufes  $D(n)$  bei Ermüdung schwingend beanspruchter Bauteile

Es wird keine Schädigung ( $D = 0$ ) bei  $n = 0$  und totale Schädigung ( $D = 100\%$ ) für die Bruchlastwechselzahl  $n = N_B$  angenommen. Offensichtlich wird die Schädigung in jeder Ermüdungsphase durch andere physikalische Größen repräsentiert. Hinzu kommt, daß identische Bauteile jeweils spezifische Schädigungsverläufe aufweisen, so daß sowohl die Anrißlastwechselzahl  $N_A$  als auch  $N_B$  streuungsbehaftete Größen sind. Daraus resultieren die großen Streuungen der Wöhlerlinien.

Vor dem Hintergrund dieser drei Unsicherheiten (Streuung der Wöhlerlinie, Streuung der Beanspruchung und Nichterfaßbarkeit der Schädigung in ihrer Komplexität) wurden bisher zahlreiche lineare und nichtlineare Lösungsverfahren der Betriebsfestigkeit entwickelt. Nachfolgend wird an einigen ausgewählten Beispielen die Wirksamkeit linearer Regression, einfacher Mittelwertbildung, linearer Potenzansätze sowie linearer Schadensakkumulation diskutiert.

## 2. Beschreibung von Wöhlerlinien

Wöhlerlinien wurden bereits in verschiedenster Form mathematisch modelliert [1]. Neben nichtlinearen Ansätzen hat sich die einfache Exponentialgleichung zur Beschreibung der Zeitfestigkeit bewährt:

$$N(\sigma_a) = K_W \cdot \sigma_a^{-\phi} \quad (1)$$

mit

- N: Bruchlastwechselzahl für eine bestimmte Überlebenswahrscheinlichkeit  $P_U$
- $\sigma_a$ : Beanspruchungsamplitude
- $K_W$ : Wöhlerlinienkonstante
- $\phi$ : Wöhlerlinienexponent

Gl. (1) stellt im  $\log \sigma_a - \log N$ -Diagramm eine Gerade dar, und die Konstanten  $K_W$  und  $\phi$  sind über lineare Regression ermittelbar, wenn Ergebnisse zu mehr als zwei Spannungshorizonten vorliegen.

Zur Beschreibung der schiefssymmetrischen Verteilung der Einzelwerte je Spannungshorizont wird zunehmend die logarithmische Normalverteilung mit zwei Parametern genutzt, für die lineare Regression im Gauß'schen Wahrscheinlichkeitsnetz anwendbar ist.

Unter Annahme logarithmischer Normalverteilung für die Einzelwerte kann die Median-Wöhlerlinie ( $P_U = 50\%$ ) nach Gl. (1) sogar aus nur einer linearen Regression über alle Einzelwerte im  $\log \sigma_a - \log N$  - Diagramm ermittelt werden.

Die Wirksamkeit linearer Regression bei Wöhlerlinien beruht auf der geringen Stichprobenanzahl je Spannungshorizont. Mit den wenigen Einzelwerten sind im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung nur grobe Schätzungen der Quantilwerte möglich; hier führen Ansätze höherer Ordnung oder Verteilungsfunktionen mit mehr Parametern nicht zwangsläufig zu höherer Genauigkeit.

Das gilt um so mehr für die Dauerfestigkeit. Die auch als deterministische Rechengröße verwendete Dauerfestigkeitsgrenze [2-4] stellt gewissermaßen nur eine Punktwolke dar. Auch aufwendige Verfahren zur experimentellen Ermittlung einzelner Quantilwerte der Dauerfestigkeit, wie das Treppenstufenverfahren [5], das Abgrenzungsverfahren [6] oder die stochastische Approximation [7-8], können nur Schätzwerte liefern, deren Güte an größere Datenmengen gebunden ist.

### 3. Mittelspannungseinfluß

Im Ergebnis jeder zweiparametrischen Klassierung entsteht eine zweidimensionale Dichtefunktion, die als Markovsche Übergangsmatrix (Korrelationstabelle) darstellbar ist. Nur wenn ein komplettes Wöhlerliniensystem für alle in der Markov-Matrix auftretenden Mittelspannungswerte vorliegt, kann sofort die Lebensdauer berechnet werden. Das aber ist fast immer ausgeschlossen, so daß auf Amplituden umgerechnet werden muß, für die Wöhlerlinien vorhanden sind. Hier hat sich ein linearer Ansatz [9] (zitiert in [10]) zur Umrechnung bewährt, der als „Verfahren der erweiterten Schwingbreiten“ bezeichnet wird:

$$\sigma_{ae} = \sigma_a + \psi \cdot \sigma_m \quad (2)$$

mit

$\sigma_{ae}$ : erweiterte Amplitude ohne Mittelspannung

$\sigma_a$ : mittelspannungsbehaftete Amplitude

$\sigma_m$ : Mittelspannung

$\psi$ : Mittelspannungsempfindlichkeit [11]

Damit wird ein Wöhlerliniensystem mit nur einem Freiwert  $\psi$  postuliert. Um  $\psi$  experimentell zu ermitteln, sind mindestens 4 Versuchsserien erforderlich: Jeweils auf zwei Spannungshorizonten eine Serie ohne Mittelspannung und eine Serie mit  $\sigma_m = \sigma_{mI}$ , Bild 2.

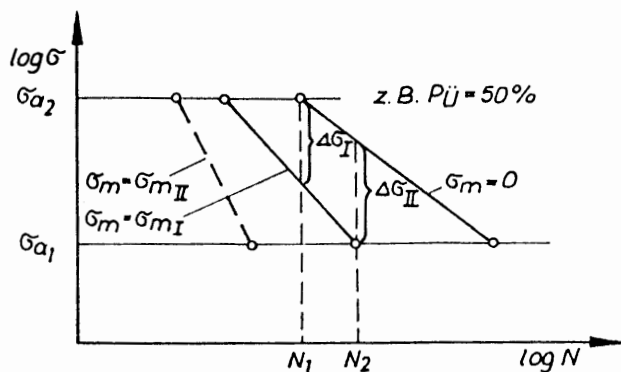


Bild 2: Wöhlerlinien für verschiedene Mittelspannungen

Dann werden nach statistischer Auswertung daraus zwei Wöhlerlinien für bestimmte Überlebenswahrscheinlichkeit konstruiert und die Differenz  $\Delta\sigma_1$  und  $\Delta\sigma_2$  für zwei Bruchlastwechsel  $N_1$  und  $N_2$  abgelesen und  $\psi = (\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2)/(2 \cdot \sigma_m)$  berechnet. Zusätzliche Wöhlerlinien für andere Mittelspannungen können durch arithmetische Mittelung über die Differenzen  $\Delta\sigma_i$  einbezogen werden. Ein nichtlinearer Ansatz, z. B.

$$\sigma_{ae} = \sigma_a + \psi \cdot \sigma_m + \xi \cdot \sigma_m^2 \quad (3)$$

würde lediglich zwei weitere Versuchsserien für eine Mittelspannung  $\sigma_m = \sigma_{mII}$  zur Bestimmung des zweiten Freiwertes  $\xi$  erfordern. Es muß aber beachtet werden, daß die Mittelspannungsempfindlichkeit auch von der Blocklänge der Beanspruchung abhängt [12]. Eine Formel höherer Ordnung allein führt also noch nicht zur Lösung des Problems, so daß auch hier wieder der lineare Ansatz eine brauchbare Näherung darstellt.

### Schadensakkumulation

Als Prototyp für lineare Schadensakkumulation gilt die Formel von Palmgren [13] und Miner [14]

$$N_M = \frac{\sum_{k=1}^m n_k}{\sum_{k=1}^m \frac{n_k}{N_k}} \quad (4)$$

mit

- $N_M$ : Lebensdauer nach Palmgren/Miner (hier ohne Berücksichtigung der Dauerfestigkeit)
- $k$ : Beanspruchungsstufe
- $m$ : Anzahl der Stufen je Teilfolge
- $n_k$ : Anzahl der Lastwechsel je Stufe
- $N_k$ : Bruchlastwechsel der Stufe  $k$

Gl. (4) setzt lineare Schädigung voraus, d. h. in Bild 1 eine Gerade als Schädigungsverlauf. Die Lebensdauer  $N_M$  kann auch geometrisch hergeleitet werden [14]:

Gegeben sei eine Dreistufen-Beanspruchung, Bild 3a. Die drei Blockstufen bilden eine Teilfolge, die theoretisch unendlich fortgesetzt wird. Aus der Wöhlerlinie folgt zunächst die Lebensdauer  $N_k$  für jede Amplitude  $\sigma_{ak}$ , z. B. nach Gl. (1).

Jeweils bei  $N_k$  hat die lineare Schädigung den Wert Eins, Bild 3b, so daß für jede Stufe  $k$  nur ein anderer Schädigungsanstieg („Schädigungsgradient  $\Delta D_k = 1/N_k$ “ [15–17]) vorhanden ist. Nach  $n_k$  Lastwechseln entsteht ein proportionaler Schädigungsanteil  $dD_k = n_k/N_k$ , und für die Teilfolge mit

$$n_{ges} = \sum_{k=1}^m n_k \quad (\text{hier } m = 3) \text{ gilt der Teilschaden}$$

$$dD_{ges} = \sum_{k=1}^m dD_k = \sum_{k=1}^m \frac{n_k}{N_k}$$

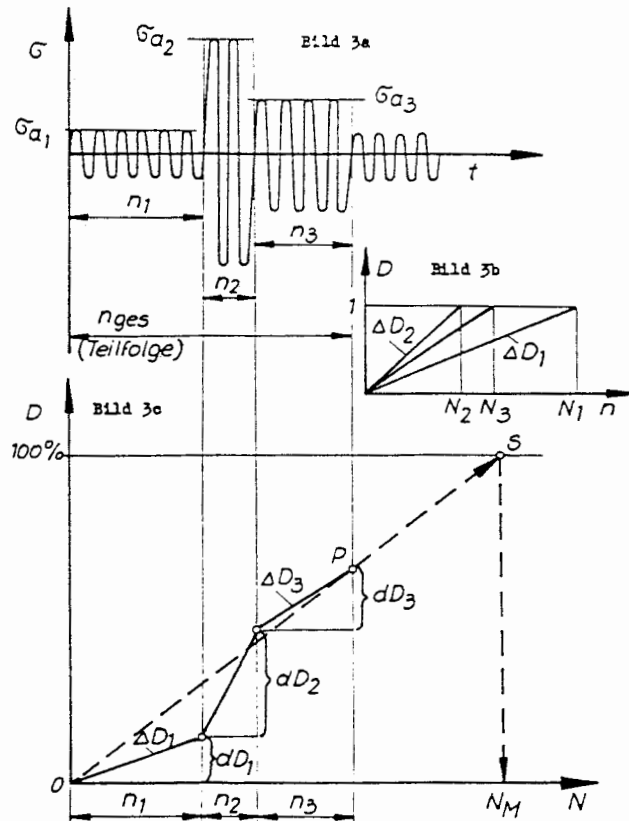


Bild 3a, b, c: Geometrische Interpretation der linearen Schadensakkumulationshypothese von Palmgren/Miner

Da die Teilfolge unendlich wiederholt wird, läßt sich dieser Vorgang geometrisch als lineare Projektion darstellen. Dabei wird im Bild 3c von Null über den Punkt P bis zum Schnittpunkt S bei  $D = 100\%$  projiziert. Der entsprechende Abszissenwert ist bereits die Lebensdauer  $N_M$  nach Gl. (4), wegen

$$100\% : \sum_{k=1}^m dD_k = N_M : n_{ges}$$

In dieser Weise wird die Reihenfolgeunabhängigkeit der Palmgren/Miner-Formel anschaulich sichtbar. Jede Vertauschung der Blockstufen  $k$  und sogar deren Einzel-Lastwechsel führt nämlich exakt auf den gleichen Projektionspunkt P (Bild 3c) und damit auf die gleiche Lebensdauer. Verschiedene andere Schadensakkumulationshypothesen, einschließlich bruchmechanischer Ansätze, lassen sich auf die Palmgren/Miner-Formel zurückführen [18–19]. Als geeignetes Kri-

terium zur Klassifizierung erweist sich dabei die „kinetische Schadensgleichung“  $dD/dt$  bzw.  $dD/dn$  [19, S. 159] und [20, SS. 487]. Wenn die kinetische Schadensgleichung in ein Produkt zweier unabhängiger Funktionen  $f_1(D)$  und  $f_2(\sigma)$  zerlegbar ist, handelt es sich um lineare Schadensakkumulation. In Abweichung zu [19] sollte jedoch zwischen linearer Schadensakkumulation und Palmgren/Miner-Formel unterschieden werden. In [15–17] wurde gezeigt, daß Gl. (4) einem arithmetischen Mittelwert von linearen Schädigungsgradienten entspricht, und es wurde eine neue Formel vorgeschlagen, die auf dem quadratischen Mittelwert beruht:

$$N_L^2 = \frac{\sum_{k=1}^m n_k}{m} < N_M^2 \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^m \frac{n_k}{N_k^2}$$

Zu Gl. (5) gehört die kinetische Schadensgleichung  $dD/dn = 1/[N(\sigma)]^2$ , d. h., es entsteht wie bei Gl. (4) ein Produkt unabhängiger Funktionen  $f_1(D)$  und  $f_2(\sigma)$  [19].

Mit anderen Worten: Lineare Schadensakkumulation bedeutet *Mittelwertbildung*. In diesem Sinne repräsentiert sowohl Gl. (4) als auch Gl. (5) lineare Schadensakkumulation. Die Palmgren/Miner-Formel als arithmetischer Mittelwert ist somit nur eine der möglichen linearen Theorien.

Übrigens führt die Postulierung nichtlinearer Schädigung nicht automatisch zu nichtlinearer Schadensakkumulation. Bei Annahme nichtlinearer Schädigungszunahme in Bild 3b ergäbe sich zwar ein anderer Punkt P im Bild 3c, aber dieser neue Punkt würde bei jeder Block-Vertauschung erneut entstehen. Erst wenn zusätzlich noch die bis  $n_k$  erreichte Vorschädigung berücksichtigt wird, entsteht echte Reihenfolgeabhängigkeit. Nichtlineare Schadensakkumulation ist also nichtlineare Schädigung plus Berücksichtigung der „Vorgeschichte“. Ist eine der beiden Bedingungen nicht erfüllt, entsteht sofort wieder lineare Schadensakkumulation.

Daraus folgt ein wesentlich höherer Aufwand für nichtlineare Schadensakkumulation. Neben dem nichtlinearen Schädigungsverlauf muß auch die Wirkung der Vorschädigung experimentell bestimmt werden, und die Berechnung selbst ist für jeden Lastzyklus bis zum Anriß  $N_A$  bzw. bis zum Bruch erforderlich, weil eine „Projektion“ wieder lineare Schadensakkumulation bedeuten würde.

## 5. Stochastischer Beanspruchungsprozeß

Zur Lebensdauerberechnung werden Klassierergebnisse oder Spektralwerte [15] der stochastischen Beanspruchung benötigt. Diese Werte resultieren aus der Verarbeitung eines „regellosen“ Beanspruchungs-Zeit-Verlaufes  $\sigma(t)$ . Es sollte beachtet werden, daß ein derartiger Verlauf immer nur eine willkürlich ausgewählte Realisierung des Beanspruchungsprozesses darstellt, während der Prozeß in Wirklichkeit aus  $n$  Realisierungen besteht. Mit der Auswahl und Bearbeitung einer Realisierung wird vorausgesetzt, daß der betrachtete Prozeß stationär und ergodisch ist. Die Verarbeitung der einen Realisierung bedeutet grundsätzlich, daß der Prozeß durch Zeitmittelung beschrieben wird. Jede Mittelung aber hebt die Reihenfolge auf. Insofern sind die intuitiv entwickelten linearen Schadenakkumulationshypothesen dieser Beanspruchungsprozeß-Beschreibung adäquat.

## 6. Zusammenfassung

Lineare Lösungsverfahren sind vor allem dann zweckmäßig, wenn die statistische Absicherung Probleme bereitet. Zum Teil haben sich lineare Verfahren erst im Ergebnis langjähriger Erfahrungen in der Betriebsfestigkeit durchgesetzt.

Wenn erkennbar ist, daß die Treffsicherheit linearer Ansätze erschöpft ist, sollten auch nichtlineare Verfahren genutzt werden. Diese erfordern jedoch immer einen deutlich höheren experimentellen Aufwand.

## Literatur

- [1] Wirthgen, G.: Untersuchung neuer Verfahren zur Lebensdauerberechnung. Diplomarbeit TU Dresden, Sektion 13, Bereich Dynamik/Betriebsfestigkeit 1977
- [2] Miner, M. A.: Cumulative Damage in Fatigue. *J. Appl. Mech.* 12(1945), S. 159–164
- [3] Haibach, E.: Modifizierte lineare Schadensakkumulationshypothese ... Technische Mitteilung Nr. 50/70 des LBF, Darmstadt 1970
- [4] Gnilke, W.: Lebensdauerberechnung der Maschinenelemente. VEB Fachbuchverlag, Berlin 1981
- [5] Bühler, H.; Schreiber, W.: Lösung einiger Aufgaben der Dauerschwingfestigkeit mit dem Treppenstufenverfahren. *Archiv f. d. Eisenhüttenwesen* 28(1957), S. 153–156
- [6] Maennig, W.: Bemerkungen zur Beurteilung des Dauerschwingverhaltens von Stahl ... *Mat.-Prüfung* 12(1970)4, S. 124–131
- [7] Robbins, H.; Monro, S.: A Stochastic Approximation Method. *Ann. Math. Statist.* 23(1952), S. 400–407
- [8] Joensson, D.; Mauersberger, G.: Unveröff. Versuchsbericht zur Stochastischen Approximation, TU Dresden, Sektion 13, 1982
- [9] Kinasošvili, R. S.: Opredelenie zapasov pročnosti pri nestacionarnych izmenenijach peremennych naprjaženij. In: *Rasčety na pročnost. Sbornik statej, vypusk 9*, Mašgiz, Moskva 1963, S. 327–338
- [10] Hänel, B.: Betriebsfestigkeitsnachweis auf der Grundlage der Spektraldichte des regellosen Beanspruchungsprozesses. *IFL-Mitt.* 15(1976), S. 252–260
- [11] Schütz, W.: Lebensdauer bei konstanter und veränderlicher Beanspruchungsamplitude. *Z. f. Flugwissenschaften* 15(1967), S. 407–419
- [12] Lange, F.: Weiterentwicklung exp. Methoden der Schwingfestigkeits- und Zuverlässigkeitsforschung. *IFL-Bericht Nr. 600-18/82*, Dresden 1982
- [13] Palmgren, A.: Die Lebensdauer von Kugellagern. *VDI-Z.* 69(1924), S. 339–341
- [14] Joensson, D.: Vortrag des 85. Kolloquiums Maschinendynamik. TU Karl-Marx-Stadt, Sektion Maschinen-Bauelemente, 22. 1. 1987
- [15] Joensson, D.: Neue Anwendung schneller Fouriertransformation in der Betriebsfestigkeit und finiter Elemente in der Sintertheorie. *Diss. B*, TU Dresden 1985
- [16] Joensson, D.: Lebensdauerberechnung für schwingend beanspruchte Bauteile auf spektralanalytischer Grundlage. *IFL-Mitt.* 24(1985)5, S. 112–115
- [17] Joensson, D.: Verteilungsfreie spektralanalytische Lebensdauerberechnung. *Technische Mechanik* 7(1986)1, S. 59–66 sowie 2, S. 31–36 und 3, S. 65–72
- [18] Wirthgen, G.: Berechnungsverfahren der Betriebsfestigkeit und ihre Berücksichtigung in Vorschriftenentwürfen. *IFL-Mitt.* 21(1982), S. 35–43
- [19] Hennig, K. u. a.: Zur Zuverlässigkeit tragender Konstruktionen. *Ergebnisberichte zur Entwicklung von Sicherheitsvorschriften ...*, Heft 1, AdW der DDR, Institut für Mechanik 1981
- [20] Bolotin, V. V.: Wahrscheinlichkeitsmethoden zur Berechnung von Konstruktionen. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1981

(Eingang: 04. 12. 1987)

*Autor: Dr. sc. techn. Dieter Joensson, Ingenieurhochschule Berlin, Sektion Produktionsautomatisierung, Markstraße 9, Berlin, 1134*